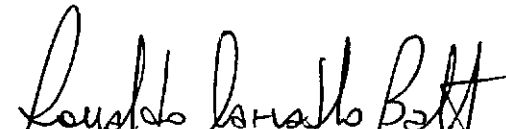


UM MODELO MATEMÁTICO PARA ESTABILIDADE ELÁSTICA
DE CASCAS CILÍNDRICAS ENRIJECIDAS

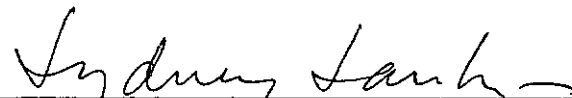
CÁTIA CÂMARA BANDEIRA DE FIGUEIREDO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

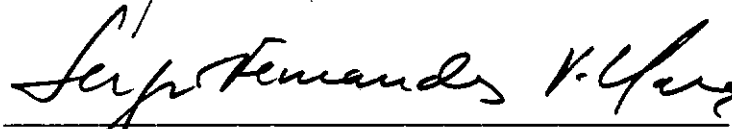
APROVADA POR:



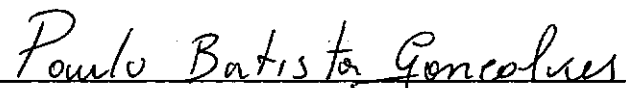
PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA
(PRESIDENTE)



PROF. SYDNEY M. GOMES DOS SANTOS



PROF. SÉRGIO FERNANDES VILLAÇA



PROF. PAULO BATISTA GONÇALVES

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JUNHO DE 1988

FIGUEIREDO, CÁTIA CÂMARA BANDEIRA DE

Um Modelo Matemático para Estabilidade Elástica de Cascas Cilíndricas Enrijecidas (Rio de Janeiro) 1988.

xxii, 212 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1988)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Instabilidade de Cascas I. COPPE/UFRJ II. Título
Série)

A Bernardo e nossas filhas,
Renata e Márcia.

Uma homenagem especial a meu pai

JOSE GOULART CÂMARA

que me deixa, além de todos os
seus exemplos de autenticidade,
perseverança e afeto, uma sauda-
de imensa.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM MODELO MATEMÁTICO PARA ESTABILIDADE ELÁSTICA
DE CASCAS CILÍNDRICAS ENRIJECIDAS

Cátia Câmara Bandeira de Figueiredo

Junho, 1988

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

Um modelo matemático para a investigação dos caminhos de equilíbrio de uma casca cilíndrica enrijecida longitudinalmente, submetida a compressão axial, é aqui apresentado.

A formulação proposta, estabelecida para modelos perfeitos, é restrita à análise de um trecho genérico painel-enrijecedor desse tipo de casca. O modelo matemático é gerado a partir da solução geral das equações diferenciais não-lineares de equilíbrio dinâmico de uma casca cilíndrica isotrópica. A modelagem leva em conta, de forma consistente, os acoplamentos entre modos de deslocamento na resposta não-linear dessas estruturas. Os enrijecedores são considerados elementos discretos, esbeltos e bastante espaçados, tendo sua rigidez torsional incluída na análise do problema.

Permite-se, assim, o estudo da estabilidade local dos

painéis cilíndricos enrijecidos e a possibilidade de avaliação da interação entre modos de flambagem locais e globais de deslocamento.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A MATHEMATICAL MODEL FOR ELASTIC STABILITY
OF STRINGER STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS

Cátia Câmara Bandeira de Figueiredo

June, 1988

Chairman: Ronaldo Carvalho Batista

Department: Civil Engineering

A mathematical model to investigate non-linear branching equilibrium paths of stringer stiffened cylindrical shells under axial compression is presented.

This model is based on a general displacements solution of the dynamic non-linear differential equilibrium equations for an isotropic thin cylindrical shell. The stiffeners are assumed to be widely spaced discret slender elements and their torsional stiffness are taken into account.

The modelling considers, in a consistent way, the coupling between all essential displacement modes - from shell and stiffeners - that occur during the non-linear response of these structures.

In other words, this mathematical model allows the elastic stability analysis of stiffened cylindrical panels considering the interaction between local and overall critical (or buckling) modes.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
I.1. Histórico	1
I.2. Objetivos e Procedimentos da Tese	4
 CAPÍTULO II - MODELO ESTRUTURAL E HIPÓTESES BÁSICAS PARA A ANÁLISE DA ESTABILIDADE	 6
II.1. Definição da Estrutura da Casca Cilíndrica Enrijecida	6
II.2. Parâmetros Geométricos - Sistemas de Referência	9
II.3. Condições de Simetria e Compatibilidade de Deslocamentos	12
II.4. Condições de Contorno do Modelo Estrutural	15
 CAPÍTULO III - ESTABELECIMENTO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS PARA O MODELO ADOTADO	 17
III.1. Forma Geral de Solução para Deslocamentos de uma Casca (ou Pannel) Cilíndrica	17
III.2. Modos Críticos e Secundários para o Pannel Cilíndrico	19
III.3. Modos Críticos e Secundários para o Enrijecedor	35
III.4. Introdução das Condições de Contorno nos Campos de Deslocamentos	36

CAPÍTULO IV - MONTAGEM DO FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL	39
IV.1. Energia Potencial Total do Sistema Painei-Enrije- cedor	39
IV.1.1. Energias de deformação elástica	39
IV.1.2. Potenciais de cargas externas	48
IV.1.3. Expressões das energias potenciais totais	50
IV.2. Normalização dos Funcionais de Energia Potencial Total	51
IV.3. Expressão dos Funcionais de Energia na Forma In- cremental	56
IV.3.1. Energia potencial na forma incremental para o painei cilíndrico	56
IV.3.2. Energia potencial na forma incremental para o enrijeecedor	66
CAPÍTULO V - FUNCIONAIS DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL E EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO	72
V.1. Critérios de Energia para Estabilidade e Princípio de Estacionariedade	72
V.2. Discretização do Funcional de Energia Potencial To- tal do Painei Cilíndrico	75
V.3. Discretização do Funcional de Energia Potencial To- tal do Enrijeecedor	89
V.4. Estabelecimento do Sistema de Equações Não-Linea- res de Equilíbrio	94
CAPÍTULO VI - AVALIAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO	131
VI.1. Considerações Gerais	131

VI.2. Justificativas de Hipóteses Mecânicas sob o Ponto de Vista Matemático	134
VI.3. Análise Qualitativa do Acoplamento Modal	136
 CAPÍTULO VII - COMENTÁRIOS FINAIS	 143
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 146
 APÊNDICE A - TABELAS DE INTEGRAÇÕES DAS FUNÇÕES CONSTAN- TES NO FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TO- TAL	 150
APÊNDICE B - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	171
APÊNDICE C - EXPRESSÕES DOS ELEMENTOS DA MATRIZ JACOBIA- NA	 186

NOMENCLATURA

- c - semi-profundidade do enrijecedor
- $C = \sqrt{3-(1-\nu^2)}$ - constante relacionada ao coeficiente de Poisson
- $D = \frac{E h_p^3}{12(1-\nu^2)}$ - constante de rigidez à flexão do painel cilíndrico
- E - módulo de Young
- e - excentricidade do enrijecedor em relação ao painel cilíndrico
- f_i^p - funções definidas no texto - eqs. (V.12)
- f_i^s - funções definidas no texto - eqs. (V.17)
- h_p - espessura do painel cilíndrico
- h_s - espessura do enrijecedor
- $K = \frac{E h_p}{(1-\nu^2)}$ - constante de rigidez extensional do painel cilíndrico
- L - comprimento da casca cilíndrica enrijecida ou comprimento dos enrijecedores
- $\ell = L/R$ - comprimento adimensional da casca cilíndrica enrijeci

da ou comprimento adimensional dos enrijecedores

$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$ - componentes de momento do painel cilíndrico

$M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}$ - componente de momento do painel cilíndrico, segundo o referencial adimensional

$M_\xi^F, M_\theta^F, M_{\xi\theta}^F$ - componentes fundamentais de momento do painel cilíndrico

$M_\xi', M_\theta', M_{\xi\theta}'$ - componentes lineares de momento do painel cilíndrico

M_z, M_x, M_{zx} - componentes de momento do enrijecedor

$M_\zeta, M_\xi, M_{\zeta\xi}$ - componentes de momento do enrijecedor, segundo o referencial adimensional

$M_\zeta^F, M_\xi^F, M_{\zeta\xi}^F$ - componentes fundamentais de momento do enrijecedor

$M_\zeta', M_\xi', M_{\zeta\xi}'$ - componentes lineares de momento do enrijecedor

$N = 2p$ - número de painéis cilíndricos ou número de enrijecedores

$N_p = -\sigma h_p$ - resultante das tensões externas de compressão ao longo de um bordo extremo de um painel cilíndrico

$N_s = -\sigma h_s$ - resultante das tensões externas de compressão ao longo de um bordo extremo de um enrijecedor

$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ - esforços internos de membrana no painel cilíndrico

$N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}$ - esforços internos de membrana no painel cilíndrico, segundo o referencial adimensional

$N_\xi^F, N_\theta^F, N_{\xi\theta}^F$ - componentes fundamentais dos esforços internos de membrana do painel cilíndrico

$N_{\xi}^{\prime}, N_{\theta}^{\prime}, N_{\xi\theta}^{\prime}$ - componentes lineares dos esforços internos de membrana do painel cilíndrico

$N_{\xi}^{\prime\prime}, N_{\theta}^{\prime\prime}, N_{\xi\theta}^{\prime\prime}$ - componentes quadráticas dos esforços internos de membrana do painel cilíndrico

N_z, N_x, N_{zx} - esforços internos de membrana do enrijecedor

$N_{\zeta}, N_{\xi}, N_{\zeta\xi}$ - esforços internos de membrana do enrijecedor, segundo o referencial adimensional

$N_{\zeta}^F, N_{\xi}^F, N_{\zeta\xi}^F$ - componentes fundamentais dos esforços internos de membrana do enrijecedor

$N_{\zeta}^{\prime}, N_{\xi}^{\prime}, N_{\zeta\xi}^{\prime}$ - componentes lineares dos esforços internos de membrana do enrijecedor

$N_{\zeta}^{\prime\prime}, N_{\xi}^{\prime\prime}, N_{\zeta\xi}^{\prime\prime}$ - componentes quadráticas dos esforços internos de membrana do enrijecedor

n - número de semi-ondas longitudinais

P - força externa de compressão

p - número de ondas completas na direção circunferencial

$q = \frac{n\pi}{\ell}$ - parâmetro relacionado aos modos longitudinais

R - raio da superfície média da casca cilíndrica

$u_p; u_s$ - energias de deformação elástica internas do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente

u_{pm} - componente de membrana da energia elástica do painel

u_{pf} - componente de flexão da energia elástica do painel cilíndrico

u_{m2}, u_{m3}, u_{m4} - componentes quadráticas, cúbicas e quárticas da energia de membrana de painel cilíndrico

u_{sm} - componente de membrana da energia elástica do enrijecedor

u_{sf} - componente de flexão da energia elástica do enrijecedor

U - energia de deformação elástica interna do sistema painel-enrijecedor

$\underline{u}_p; \underline{u}_s$ - campos de deslocamentos do painel cilíndrico ($u_p; v_p; w_p$) e do enrijecedor ($u_s; v_s; w_s$), respectivamente, segundo o referencial $\vec{x} \vec{y} \vec{z}$

$U_p; U_s$ - componentes de deslocamentos do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente, na direção do eixo x

$\underline{u}_p; \underline{u}_s$ - campos adimensionais de deslocamentos do painel cilíndrico ($u_p; v_p; w_p$) e do enrijecedor ($u_s; v_s; w_s$), respectivamente; campos de deslocamentos incrementais do painel cilíndrico $\underline{u}_p^I (u_p^I; v_p^I; w_p^I)$ e do enrijecedor $\underline{u}_s^I (u_s^I; v_s^I; w_s^I)$, respectivamente

$\underline{u}_p^F; \underline{u}_s^F$ - campos fundamentais de deslocamentos do painel cilíndrico ($u_p^F; v_p^F; w_p^F$) e do enrijecedor ($u_s^F; v_s^F; w_s^F$), respectivamente

\underline{u} - campo de deslocamentos do sistema painel-enrijecedor; campo incremental \underline{u}^I do sistema painel-enrijecedor; vetor das amplitudes de flambagem $\underline{u}(w_i)$ - eq. (V.22)

$u_p = \frac{U_p}{R}$ - componente adimensional do deslocamento do painel

cilíndrico na direção do eixo ξ ; componente u_p^I do deslocamento incremental do painel cilíndrico na direção do eixo ξ

$u_s = \frac{U_s}{R}$ - componente adimensional do deslocamento do enrijecedor na direção do eixo ξ ; componente u_s^I do deslocamento incremental do enrijecedor na direção do eixo ξ

$u_p^F; u_s^F$ - componentes dos deslocamentos fundamentais do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente, na direção do eixo ξ

u_i - amplitude dos modos de deslocamento na direção do eixo ξ

$V_p; V_s$ - energias potencial total do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente

V - energia potencial total do sistema painel-enrijecedor

$V_p^F; V_{p1}; V_{p2}; V_{p3}; V_{p4}$ - componentes fundamental, linear, quadrática, cúbica e quártica da energia potencial total do painel cilíndrico, respectivamente

$V_s^F; V_{s1}; V_{s2}; V_{s3}; V_{s4}$ - componentes fundamental, linear, quadrática, cúbica e quártica da energia potencial total do enrijecedor, respectivamente

$V^F; V_1; V_2; V_3; V_4$ - componentes fundamental, linear, quadrática, cúbica e quártica da energia potencial total do sistema painel-enrijecedor, respectivamente

λV_{m2} - energia potencial de membrana do painel cilíndrico

$\lambda V_{m2}^\xi; \lambda V_{m2}^\theta$ - componentes da energia potencial de membrana do pai-

nel cilíndrico segundo as direções dos eixos ξ e θ , respectivamente

$\Delta V_p; \Delta V_s$ - variações das energias potencial total do painel cilíndrico ($V_p^F; V_{p_1}; V_{p_2}; V_{p_3}; V_{p_4}$) e do enrijecedor ($V^F; V_{s_1}; V_{s_2}; V_{s_3}; V_{s_4}$), respectivamente

ΔV - variação da energia potencial total do sistema paine-enrijecedor ($V^F; V_1; V_2; V_3; V_4$)

$V_p; V_s$ - componentes de deslocamentos do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente, na direção do eixo y

$v_p = \frac{V_p}{R}$ - componente adimensional do deslocamento do painel cilíndrico na direção circunferencial; componente v_p^I do deslocamento incremental do painel cilíndrico na direção circunferencial

$v_s = \frac{V_s}{R}$ - componente adimensional do deslocamento do enrijecedor na direção circunferencial; componente v_s^I do deslocamento incremental do enrijecedor na direção circunferencial

$v_p^F; v_s^F$ - componentes dos deslocamentos fundamentais do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente, na direção circunferencial

v_i - amplitude dos modos de deslocamento na direção circunferencial

$W_p; W_s$ - componentes de deslocamentos do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente, na direção do eixo z

$w_p = \frac{W_p}{R}$ - componente adimensional do deslocamento do painel cilíndrico na direção do eixo ξ ; componente w_p^I do des-

locamento incremental do painel cilíndrico na direção do eixo ζ

$w_s = \frac{W_s}{R}$ - componente adimensional do deslocamento do enrijecedor na direção do eixo ζ ; componente w_s^I do deslocamento incremental do enrijecedor na direção do eixo ζ

$w_p^F; w_s^F$ - componentes dos deslocamentos fundamentais do painel cilíndrico e do enrijecedor, respectivamente, na direção ζ

w_i - amplitude dos modos de deslocamento na direção do eixo ζ

X, x - coordenada axial

Y, y - coordenada circunferencial

Z, z - coordenada radial

$i; j; k; m; n$ - números inteiros

α_i - número real

$\alpha = \frac{h_p^2}{12R^2}$ - constante adimensional

α - parâmetro relacionado ao número de ondas longitudinais - eq. (III.9a)

β - parâmetro relacionado ao número de ondas circunferenciais - eq. (III.9b)

$\gamma = \frac{c}{R}$ - semi-profundidade adimensional do enrijecedor

$\delta()$ - operador variacional

$\epsilon = \frac{e}{R}$ - excentricidade adimensional do enrijecedor em relação

ao painel

$\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_{x\theta}$ - componentes de deformação específica da superfície média do painel cilíndrico

$\epsilon_\xi, \epsilon_\theta, \epsilon_{\xi\theta}$ - componentes de deformação específica da superfície média do painel cilíndrico, segundo o referencial adimensional; componentes incrementais $\epsilon_\xi^I, \epsilon_\theta^I$ e $\epsilon_{\xi\theta}^I$ de deformação da superfície média do painel cilíndrico

$\epsilon_\xi^F, \epsilon_\theta^F, \epsilon_{\xi\theta}^F$ - componentes fundamentais de deformação da superfície média do painel cilíndrico

$\epsilon'_\xi, \epsilon'_\theta, \epsilon'_{\xi\theta}$ - componentes lineares de deformação da superfície média de painel cilíndrico

$\epsilon''_\xi, \epsilon''_\theta, \epsilon''_{\xi\theta}$ - componentes quadráticas de deformação da superfície média do painel cilíndrico

$\epsilon_z, \epsilon_x, \epsilon_{zx}$ - componentes de deformação específica da superfície média do enrijecedor

$\epsilon_\zeta, \epsilon_\xi, \epsilon_{\zeta\xi}$ - componentes de deformação específica da superfície média do enrijecedor, segundo o referencial adimensional; componentes incrementais $\epsilon_\zeta^I, \epsilon_\xi^I, \epsilon_{\zeta\xi}^I$ de deformação da superfície média do enrijecedor

$\epsilon_\zeta^F, \epsilon_\xi^F, \epsilon_{\zeta\xi}^F$ - componentes fundamentais de deformação da superfície média do enrijecedor

$\epsilon'_\zeta, \epsilon'_\xi, \epsilon'_{\zeta\xi}$ - componentes lineares de deformação da superfície média do enrijecedor

$\epsilon''_\zeta, \epsilon''_\xi, \epsilon''_{\zeta\xi}$ - componentes quadráticas de deformação da superfície média do enrijecedor

$$\theta_0 = \frac{\pi}{N} - \text{semi-ângulo entre enrijecedores}$$

$$\theta = \frac{y}{R} - \text{coordenada circunferencial adimensional}$$

$$\zeta = \frac{z}{R} - \text{coordenada radial adimensional}$$

$$\eta = \frac{h_s}{h_p} - \text{razão entre a espessura do enrijecedor e a do painel cilíndrico}$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} (1-\nu^2) - \text{parâmetro adimensional de carga}$$

$$\lambda_{cr} = 2[\alpha(1-\nu^2)]^{1/2} - \text{parâmetro de carga crítica clássica}$$

$$\nu - \text{coeficiente de Poisson}$$

$$\xi = \frac{x}{R} - \text{coordenada axial adimensional}$$

$$\sigma_{cr} - \text{tensão crítica clássica}$$

$$\sigma - \text{tensão externa axial}$$

$$x_x, x_\theta, x_{x\theta} - \text{componentes da mudança de curvatura da superfície média do painel cilíndrico}$$

$$x_\xi, x_\theta, x_{\xi\theta} - \text{componentes da mudança de curvatura da superfície média do painel cilíndrico, segundo o referencial adimensional}$$

$$x_\xi^F, x_\theta^F, x_{\xi\theta}^F - \text{componentes fundamentais da mudança de curvatura da superfície média do painel cilíndrico}$$

$$x'_\xi, x'_\theta, x'_{\xi\theta} - \text{componentes lineares da mudança de curvatura da superfície média do painel cilíndrico}$$

$$x_z, x_x, x_{zx} - \text{componentes da mudança de curvatura da superfície média do enrijecedor}$$

$\chi_{\zeta}, \chi_{\xi}, \chi_{\zeta\xi}$ - componentes da mudança de curvatura da superfície média do enrijecedor, segundo o referencial adimensional

$\chi_{\zeta}^F, \chi_{\xi}^F, \chi_{\zeta\xi}^F$ - componentes fundamentais da mudança de curvatura da superfície média do enrijecedor

$\chi'_{\zeta}, \chi'_{\xi}, \chi'_{\zeta\xi}$ - componentes lineares da mudança de curvatura da superfície média do enrijecedor

Ω_p - potencial do carregamento externo do painel cilíndrico

Ω_s - potencial do carregamento externo do enrijecedor

Ω - potencial do carregamento externo do sistema painel-enrijecedor

Símbolos

(\sim) - vetor

$'_x$ - operação de derivação em $x = \partial/\partial x$

$'_z$ - operação de derivação em $z = \partial/\partial z$

$'_{\xi}$ - operação de derivação em $\xi = \partial/\partial \xi$

$'_{\theta}$ - operação de derivação em $\theta = \partial/\partial \theta$

$'_{\zeta}$ - operação de derivação em $\zeta = \partial/\partial \zeta$

Índices

c - relativo a modo crítico

cr - quantidade crítica

f - relativo à flexão

m - relativo à membrana

p - referente ao painel cilíndrico

s - referente ao enrijecedor

$x;\xi$ - relativo à direção axial

$y;\theta$ - relativo à direção circunferencial

$z;\zeta$ - relativo à direção radial

$0,1,2,3,4$ - referente a termos fundamentais, lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos, respectivamente

i,j,k,m,n,k,t - relativos a séries ou seqüências de valores

Notações

$(k;t)$ - par de inteiros associados aos modos secundários de deslocamento conforme eq. (III.3)

$W^C(q;p)$ - referente ao modo crítico $w^C \sin q \xi \cos p \theta$

$W^S(kq;tp)$ - referente ao modo secundário $w^S \cos kq \xi \cos tp \theta$

$()^F$ - referente ao estado fundamental

$()^I$ - referente ao estado incremental

$A_i \equiv \sin iq \xi$

$B_i \equiv \cos iq \xi$

$C_i \equiv \sin ip \theta$

$D_i \equiv \cos ip \theta$

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. HISTÓRICO

A complexidade do processo de flambagem de cascas cilíndricas é devida, principalmente, à interação não-linear entre a família de modos críticos e outros modos que a estes se acoplam, e, ainda, ao largo espectro de imperfeições iniciais, as quais podem influenciar o comportamento estrutural e as cargas de flambagem.

A elucidação completa deste mecanismo de instabilidade, que conduz a grandes discrepâncias entre a carga crítica teórica clássica e as obtidas experimentalmente, continua sendo um grande desafio para os investigadores desde os trabalhos pioneiros de DONNELL [1], de 1934, de VON KÁRMÁN E TSIEN [2], de 1941, e de KOITER [3], de 1945, dos quais, os dois primeiros se destacam pela consideração das imperfeições geométricas nas equações não-lineares para grandes deslocamentos e o último, pelo desenvolvimento da Teoria Geral da Estabilidade Elástica.

Dentro do Programa de Engenharia Civil da COPPE-UFRJ, as pesquisas nesta área se fizeram notar, especialmente, pelos trabalhos de BATISTA [4,5,6] e ANTONINI [7], no que diz respeito a cascas cilíndricas isotrópicas, de GONÇALVES [8,9] para cascas cilíndricas com enrijecedores anulares, e de JUSTINO [10], para cascas cilíndricas enrijecidas longitudinalmente. Os primeiros três autores comprovaram, tanto as justificativas teóricas do processo de instabilidade lançadas por DONNELL e KOITER, quanto resultados experimentais, contribuindo significativamente com alternativas simples para a resolução do problema.

Quanto às cascas enrijecidas longitudinalmente, tem-se o trabalho de JUSTINO como uma primeira tentativa num campo de pesquisa para o qual não são encontrados, na literatura, resultados teóricos que conduzam a uma total compreensão de modelos reais. É certo que, como nas cascas isotrópicas, os fatores acoplamento modal e imperfeições iniciais constituem as justificativas básicas do processo de instabilidade. No entanto, a forma como os enrijecedores são considerados constitui, também, um aspecto relevante na solução deste tipo de casca.

Nos estudos de cilindros com enrijecedores torsionalmente rígidos e pouco espaçados (comuns às estruturas aeroespaciais) os modelos teóricos [11,12,13,14,15] consideraram as propriedades dos enrijecedores distribuídas uniformemente ao longo de toda a casca, permitindo que a estrutura fosse tratada como casca simples de peso equivalente e com propriedades ortotrópicas. Com base nestas teorias, as cargas críticas associadas ao modo global de colapso de um cilindro foram determinadas, enquanto que a sua sensibilidade às imperfeições e os efeitos da excentricidade de enrijecedores foram apenas estimados. Desta

forma, ignorava-se a possibilidade de instabilidade local dos painéis enrijecidos.

A importância da inclusão da rigidez torsional e excentricidade do enrijecedor no modelo teórico [15,16] foi confirmada por resultados experimentais e, assim, a flambagem local do painel passou a ser também investigada.

Para as cascas cilíndricas com enrijecedores largamente espaçados (estruturas navais e *offshore*), resultados experimentais obtidos por WALKER, ANDRONICOU e SRIDHARAN [17] mostraram que as cargas de flambagem eram geralmente inferiores às cargas críticas teóricas de cilindros com enrijecedores pouco espaçados. A redução destas cargas de flambagem em relação à teórica tem sido atribuída [18] à ocorrência de interações não-lineares entre modos de flambagem (isto é, modos críticos e de imperfeições).

Por outro lado, a consideração da interação entre modos de painel e de enrijecedores esbeltos e espaçados foi feita inicialmente por SYNGELLAKIS e WALKER [19] através de modelo teórico baseado no trabalho de KOITER [20].

O estudo de JUSTINO, sobre o comportamento não-linear de painéis enrijecidos, esbeltos e espaçados, contendo imperfeições iniciais, é o que, por sua vez, serviu de ponto de partida para o trabalho aqui apresentado. Entretanto, busca-se agora, através de uma nova formulação matemática deste problema, atender a todos os fatores que possam conduzir ao processo de instabilidade, verificado experimentalmente e ainda não resolvido analiticamente.

I.2. OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS DA TESE

O objetivo principal deste trabalho é o estabelecimento de um modelo matemático para a análise não-linear de cascas cilíndricas com enrijecedores longitudinais, esbeltos e espaçados, sujeitas à compressão axial. Inclui-se nesta formulação a maioria dos problemas referenciados na literatura [1,2,3,4,19], que são abordados no decorrer do texto, bem como comenta-se a respeito de algumas hipóteses constantes em outros trabalhos, as quais parecem ter levado a descrições imprecisas, ou pelo menos incompletas, do processo de flambagem deste tipo de estrutura.

Para tanto, é definido um modelo estrutural básico constituído de um único painel cilíndrico enrijecido, como apresentado no Capítulo II, cujo campo de deslocamentos é descrito a partir da equação diferencial não-linear de equilíbrio dinâmico de cascas cilíndricas isotrópicas [21].

A combinação modal para descrever este campo de deslocamentos do painel cilíndrico enrijecido é realizada no Capítulo III, através de uma análise e seleção criteriosas dos modos constantes naquela solução, respeitadas as novas condições introduzidas pela consideração dos enrijecedores como elementos discretos. Atende-se, portanto, à continuidade e compatibilidade do campo de deslocamentos da estrutura na junção painel-enrijecedor e ao longo da geratriz média do painel cilíndrico.

Ainda no Capítulo III, efetua-se uma primeira avaliação dos modos de flambagem selecionados, a partir da comparação dos

mesmos com aqueles anteriormente utilizados nos trabalhos das referências [1,2,7,10 e 22].

O sistema de equações não-lineares de equilíbrio para o modelo perfeito é obtido pelos desenvolvimentos teóricos dos Capítulos IV e V. Este sistema constitui o modelo matemático proposto, o qual é analisado formalmente no Capítulo VI, à luz do processo de interação modal não-linear que ocorre durante a resposta pós-crítica.

As observações sobre características físicas e matemáticas decorrentes dessa análise conduzem aos comentários finais a respeito do modelo proposto, como apresentados no Capítulo VII.

Visando permitir a continuidade do presente trabalho, apresentam-se explicitamente, no Capítulo IV, a montagem do funcional de energia potencial total na forma incremental e, no Apêndice A, as tabelas de integrações, as quais servirão para indicar os possíveis acoplamentos modais que ocorrem em uma análise multimodos de cascas ou painéis cilíndricos.

Evitando, por outro lado, a repetição, são omitidas do texto as descrições de critérios, hipóteses e procedimentos analíticos, que se referem à Teoria de Estabilidade Elástica, os quais se encontram perfeitamente desenvolvidos nos trabalhos de referências [7 e 8].

CAPÍTULO II

MODELO ESTRUTURAL E HIPÓTESES BÁSICAS PARA A ANÁLISE DE ESTABILIDADE

II.1. DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA DA CASCA CILÍNDRICA ENRIJECIDA

O modelo de análise consiste de uma casca cilíndrica esbelta com enrijecedores dispostos longitudinalmente, conforme mostrado na figura (II.1), submetida à compressão axial. Os enrijecedores podem ser internos, externos ou apenas excêntricos em relação à superfície média da casca cilíndrica.

Consideram-se, aqui, os casos nos quais a casca apresenta enrijecedores esbeltos e bastante espaçados, sendo, portanto, focalizado o mecanismo de flambagem de um painel cilíndrico entre enrijecedores, levando em conta a interação modal entre painel e enrijecedor. Isto é, investiga-se o comportamento não-linear dos painéis cilíndricos isotrópicos, durante o processo de flambagem, considerando-se a interação entre estes e os enrijecedores.

Assim, é assumida, como modo crítico de casca enrijecida

[5,7,10], uma configuração deformada definida por uma semi-onda longitudinal e p ondas completas na direção circunferencial, tendo nós (deslocamentos radiais nulos) ao longo das geratrizes onde se localizarem os enrijecedores, como ilustrado na figura (II.2). Esta forma modal foi também observada experimentalmente por WALKER, ANDRONICOU e SRIDHARAN [17].

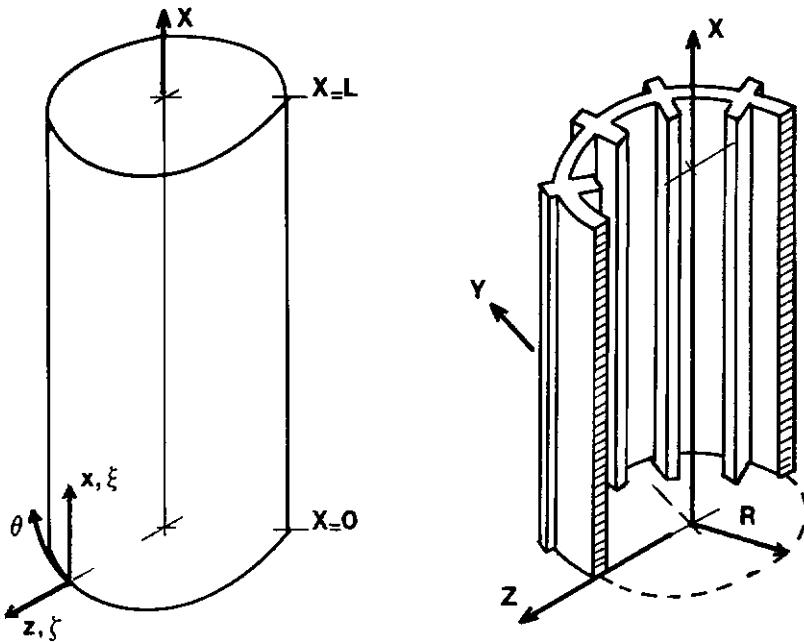


FIGURA II.1 - ASPECTO GERAL DA CASCA CILÍNDRICA

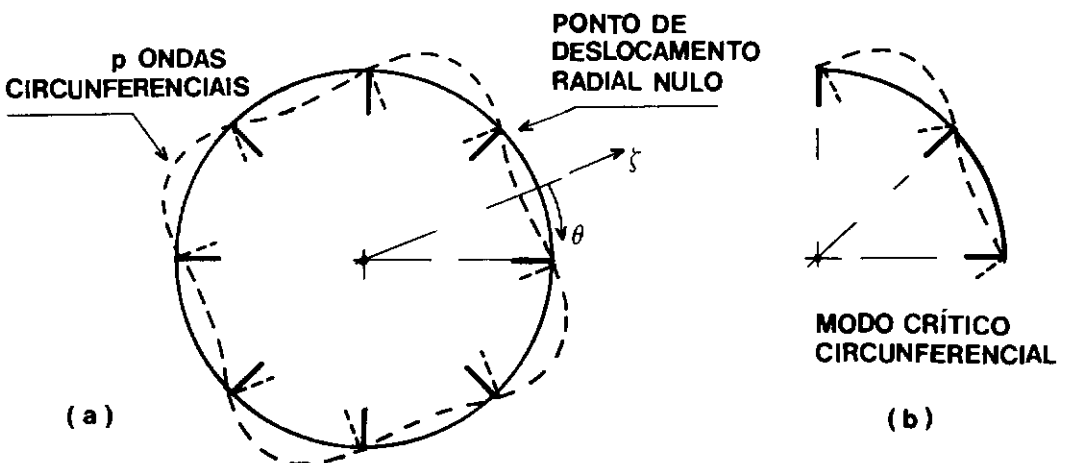


FIGURA II.2 - LOCALIZAÇÃO DOS ENRIJECEDORES E MODO CRÍTICO CIRCUNFERENCIAL

Desta forma, caracterizando-se como um painel o trecho de casca entre dois enrijecedores consecutivos, o número N de painéis cilíndricos, ou o número N de enrijecedores, define o número de ondas completas no sentido longitudinal

$$p = N/2 . \quad (II.1)$$

Ainda, pela simetria do campo de deslocamentos, torna-se possível a representação da estrutura por um modelo básico constituído por um único painel e um único enrijecedor (vide figura II.2b), tanto para fins de montagem do seu funcional de energia potencial total, quanto para o estabelecimento do campo de deslocamentos.

O material que constitui a estrutura é considerado isotropo e elástico linear; o painel cilíndrico é tratado através da teoria não-linear de DONNELL para cascas delgadas; e o enrijecedor, conforme ilustrado na figura (II.3), é tratado como placa delgada através da teoria não-linear de VON KÄRMÁN.

O comportamento do enrijecedor como placa fica caracterizado a partir dos deslocamentos transversais provocados pela rotação da ligação painel-enrijecedor como não rígido (vide figura (II.3b) e pelo mecanismo de flambagem torsional por ação do carregamento axial.

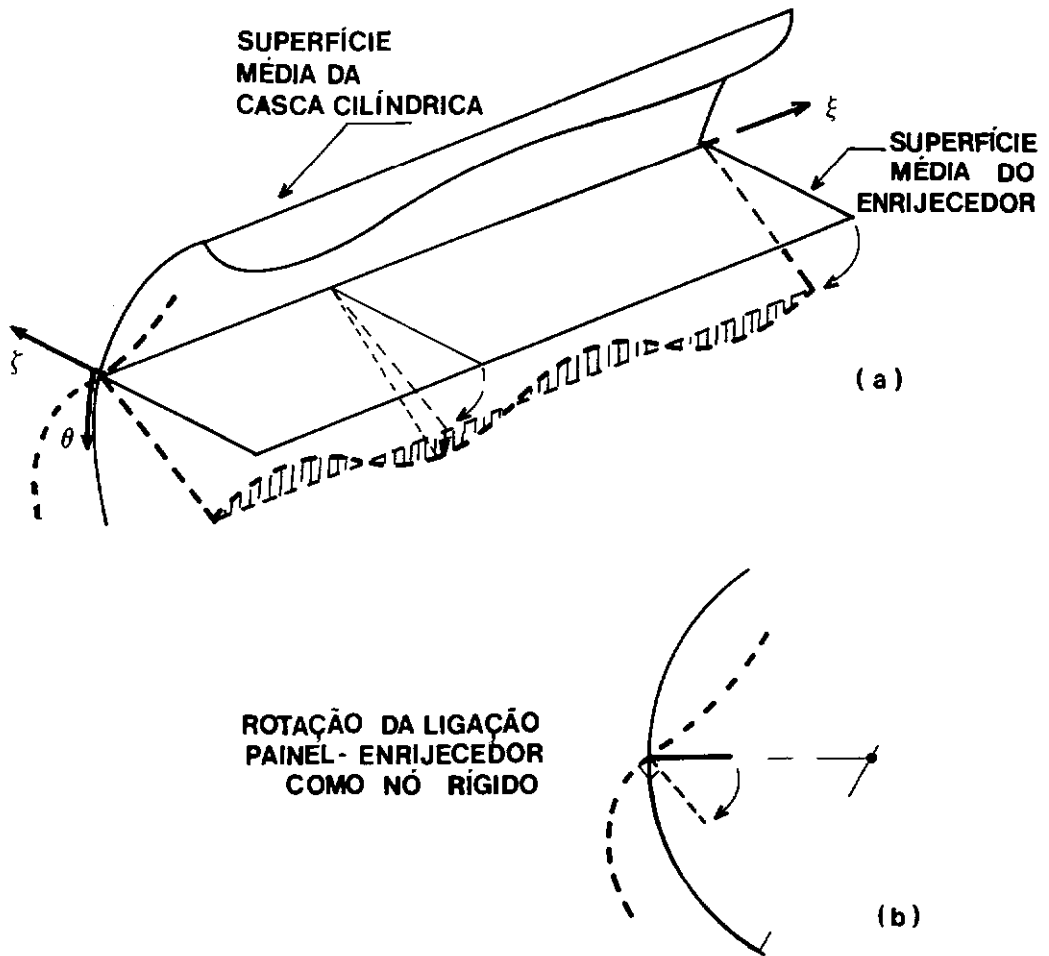


FIGURA II.3 - O ENRIJECEADOR COMO PLACA

II.2. PARÂMETROS GEOMÉTRICOS - SISTEMAS DE REFERÊNCIA

São definidos os seguintes parâmetros geométricos apresentados na figura (II.4):

L - comprimento da casca e do enrijecedor;

h_p - espessura do painel cilíndrico;

h_s - espessura do enrijecedor;

R - raio da superfície média do painel cilíndrico;

c - semi-profundidade do enrijecedor;

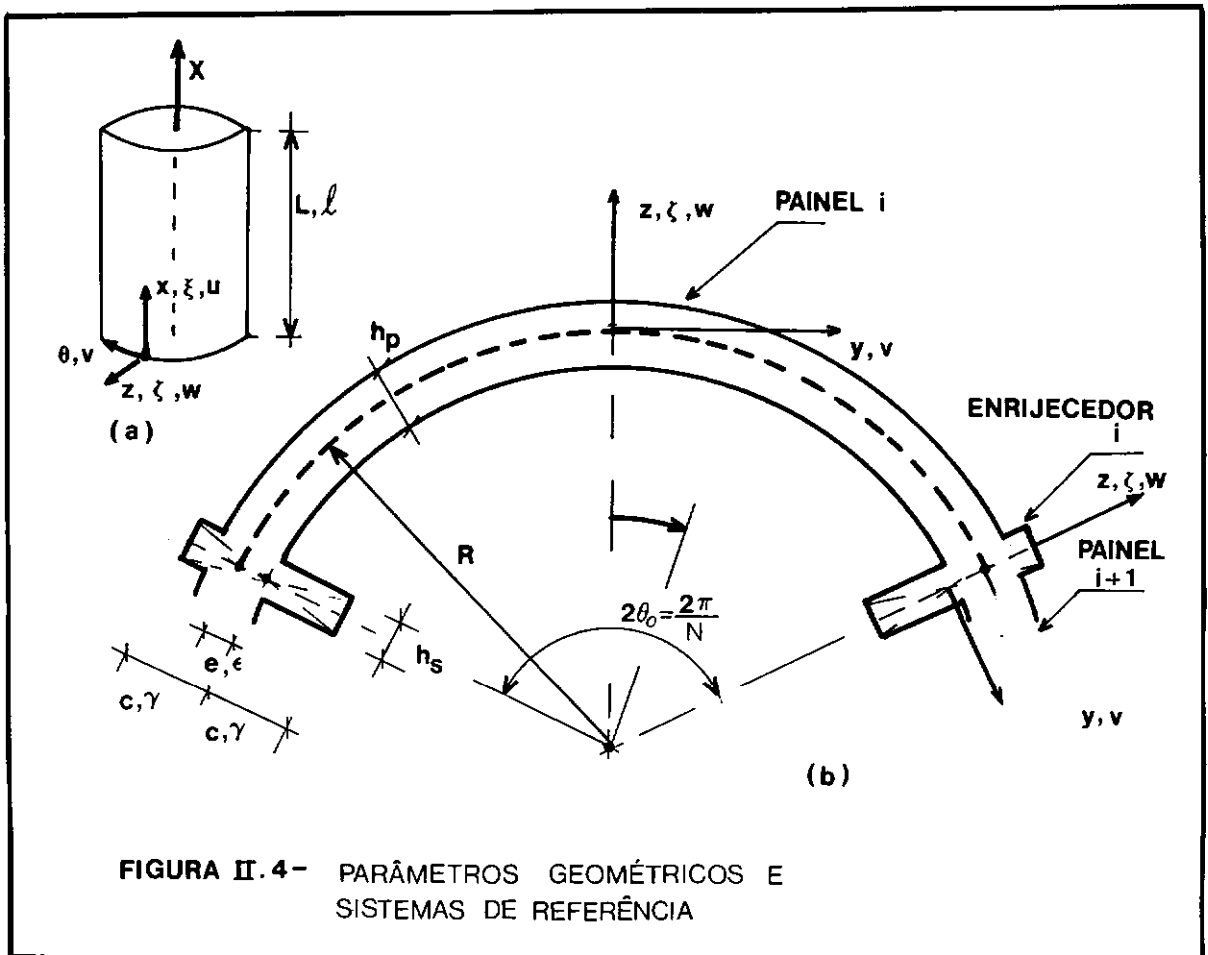
e - excentricidade do enrijecedor em relação ao painel;

θ_0 - semi-ângulo entre os enrijecedores;

$\ell=L/R$ - comprimento adimensional da casca e do enrijecedor;

$\gamma=c/R$ - semi-profundidade adimensional do enrijecedor;

$\epsilon=e/R$ - excentricidade adimensional entre enrijecedor e o painel.



São considerados os seguintes sistemas de referência:

Referencial Global - eixos \vec{X} , \vec{Y} e \vec{Z} , conforme figura (II.1).

Referenciais Locais:

- (i) Eixos \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} localizados com a origem em $X=0$, sendo \vec{x} de mesma direção e sentido de \vec{X} , coincidente com a geratriz média do painel; \vec{z} com direção radial em relação ao painel, orientado para a exterior da casca; e \vec{y} formando um triedro direto e dando origem às coordenadas polares em $\vec{\theta}$, conforme a figura (II.4b).

Este sistema estabelece as coordenadas de um ponto qualquer da superfície cilíndrica através de

x - coordenadas longitudinais;

y - coordenadas circunferenciais; e

z - coordenadas radiais.

- (ii) Eixos $\vec{\xi}$ e $\vec{\zeta}$ coincidentes com \vec{x} e \vec{z} , respectivamente, estabelecendo com $\vec{\theta}$ um sistema de referências adimensional, através das coordenadas da superfície cilíndrica dadas por:

$\xi = x/R$ - coordenadas longitudinais;

$\theta = y/R$ - coordenadas circunferenciais; e

$\zeta = z/R$ - coordenadas radiais.

Os campos de deslocamentos são dados pelas notações:

- (i) $\underline{U}(U,V,W)$ - campo de deslocamentos segundo o referen-

cial $\vec{x} \vec{y} \vec{z}$;

(ii) $\underline{u}(u,v,w)$ - campo de deslocamentos adimensionais segun
do o referencial $\vec{\xi} \vec{\theta} \vec{\zeta}$.

Desta forma, tem-se:

U e u - deslocamentos nas direções longitudinais;

V e v - deslocamentos nas direções circunferenciais; e

W e w - deslocamentos radiais;

que, acrescidos de um sub-índice p ou s , referem-se, respectivamente, a deslocamentos do painel cilíndrico ou do enrijecedor.

II.3. CONDIÇÕES DE SIMETRIA E COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS

O campo de deslocamentos adimensionais do painel cilíndrico,

$$\underline{u}_p \equiv (u_p; v_p; w_p) , \quad (II.2)$$

como observado anteriormente com auxílio das figuras (II.2) e (II.4), apresenta simetria em relação ao plano $\xi\zeta$ em $\theta=0$.

Estas condições de simetria são traduzidas pelas relações

$$\begin{aligned}
u_p(\xi, \theta) &= u_p(\xi, -\theta) \\
v_p(\xi, \theta) &= -v_p(\xi, -\theta) \\
w_p(\xi, \theta) &= w_p(\xi, -\theta) .
\end{aligned}
\tag{II.3}$$

O campo de deslocamentos adimensionais do enrijecedor,

$$\underline{u}_s \equiv (u_s; v_s; w_s) , \tag{II.4}$$

é estabelecido como uma função de \underline{u}_p a partir do atendimento das relações de compatibilidade de deslocamentos na junção painel-enrijecedor ($\theta = \theta_0$) [10,19],

$$\begin{aligned}
u_p^{(i)}(\xi, \theta_0) &= u_s^{(i)}(\xi, \varepsilon) = u_p^{(i+1)}(\xi, -\theta_0) \\
v_p^{(i)}(\xi, \theta_0) &= v_s^{(i)}(\xi, \varepsilon) = v_p^{(i+1)}(\xi, -\theta_0) \\
w_p^{(i)}(\xi, \theta_0) &= w_s^{(i)}(\xi, \varepsilon) = w_p^{(i+1)}(\xi, -\theta_0) \\
w_{p,\theta}^{(i)}(\xi, \theta_0) &= -v_{s,\xi}^{(i)}(\xi, \varepsilon) = w_{p,\theta}^{(i+1)}(\xi, -\theta_0) ,
\end{aligned}
\tag{II.5}$$

onde o super-índice (i) denota o i-ésimo elemento estrutural considerado, como definido na figura (II.4b), e onde o parâmetro ε , ilustrado pela figura (II.5), estabelece uma relação linear entre a excentricidade do enrijecedor e a superfície média do painel.

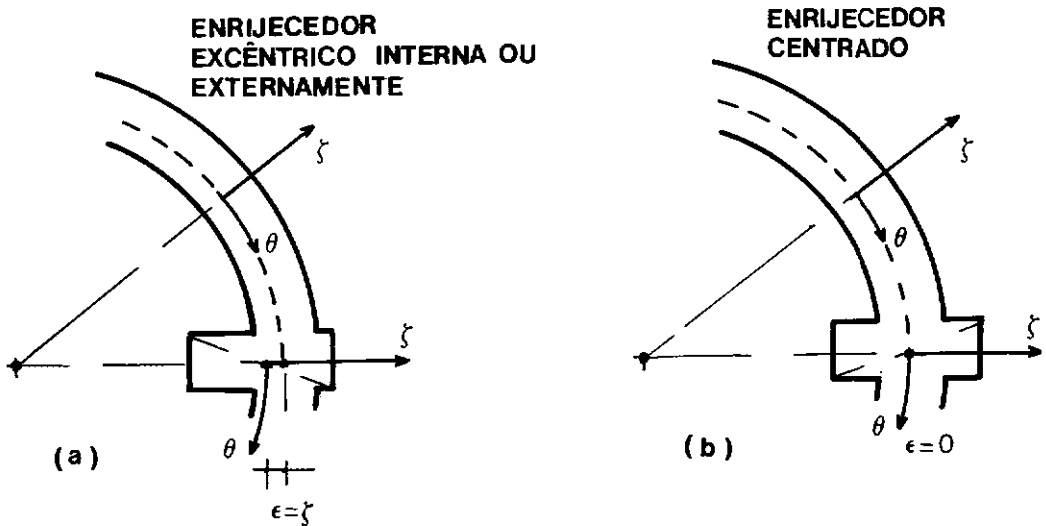


FIGURA II.5 - TIPOS DE ENRIJECEDORES

Com (II.3) e (II.5), este campo de deslocamentos pode ser escrito na forma [10,19]:

$$u_s(\xi, \zeta) = u_p(\xi, \theta_0) - (\zeta - \epsilon) w_{p,\xi}(\xi, \theta_0)$$

$$v_s(\xi, \zeta) = v_p(\xi, \theta_0) - (\zeta - \epsilon) w_{p,\theta}(\xi, \theta_0) \quad (II.6)$$

$$w_s(\xi, \zeta) = w_p(\xi, \theta_0) (1 + \zeta - \epsilon) .$$

A figura (II.5) ilustra, graficamente, as relações lineares entre os deslocamentos do enrijecedor e do painel cilíndrico ao longo da junção entre esses componentes da estrutura.

II.4. CONDIÇÕES DE CONTORNO DO MODELO ESTRUTURAL

A casca \bar{e} considerada simplesmente apoiada em suas extremidades, $\xi=0$ e $\xi=l$, e as condições de contorno lineares apropriadas são dadas pelas expressões abaixo:

$$u_{p,\xi} + \nu(v_{p,\theta} + w_p) = 0 \quad (a)$$

$$v_p = 0 \quad (b)$$

(II.7)

$$w_p = 0 \quad (c)$$

$$w_{p,\xi\xi} + \nu w_{p,\theta\theta} = 0 \quad (d)$$

e, ainda, em $\theta=\theta_0$

$$v_p = 0 \quad (a)$$

$$w_{p,\theta} = 0 \quad (b)$$

(II.8)

$$v_{p,\xi\xi} = 0 \quad (c)$$

$$v_{p,\xi\xi\theta} = 0 \quad (d)$$

As condições (II.7) de casca bi-apoiada podem ser estabecidas e/ou interpretadas pela suposição da existência de membranas, infinitamente rígidas em seu próprio plano, nas extremidades da casca, como a ilustração da figura (II.6). É interessante se observar o deslocamento dos bordos extremos da casca

($u_{\xi} \neq 0$; $N_{\xi}' = 0$) da superfície plana, que tem sido verificado experimentalmente.

Com isto, têm-se impedido, em $\xi=0$ e $\xi=l$, todo e qualquer deslocamento na direção radial ζ e permitido, somente, deslocamentos na direção longitudinal ξ , ou seja, u_p é livre nos bordos e $\frac{\partial u_p}{\partial \xi} = 0$ (condições forçadas através da suposição de $N_{\xi}' = 0$ nos bordos).

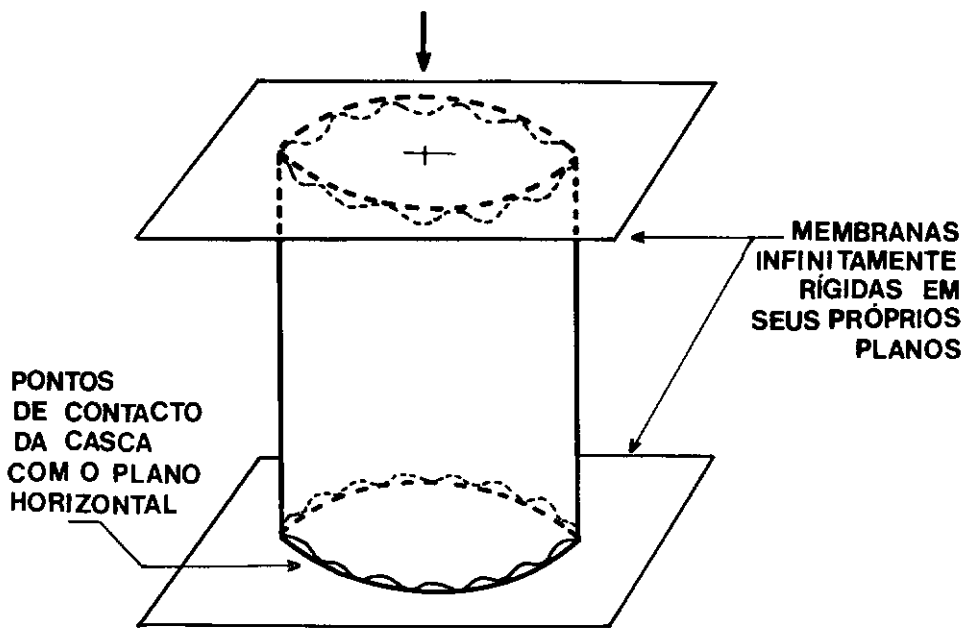


FIGURA II.6 - INTERPRETAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Quanto às condições de contorno (II.8), estas devem ser naturalmente atendidas em função da hipótese básica ilustrada na figura (II.2), isto é, considera-se que as geratrizes do cilindro, ao longo dos enrijecedores, permanecem retilíneas durante o processo de flambagem.

CAPÍTULO III

ESTABELECIMENTO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS PARA O MODELO ADOTADO

III.1. FORMA GERAL DE SOLUÇÃO PARA DESLOCAMENTOS DE UMA CASCA (OU PAINEL) CILÍNDRICA

O sistema de equações diferenciais que rege o comportamento de casca cilíndrica isotrópica, segundo o referencial adidimensional mostrado na figura (II.1), fornece como solução, para o campo de deslocamentos \underline{u}_p (u_p, v_p, w_p), as expressões [21] (III.2), sendo

$$q = \frac{n \pi R}{L} \quad (\text{III.1})$$

um parâmetro adimensional, onde n é o número de semi-ondas longitudinais, e m é o número de ondas circunferenciais.

Em função das hipóteses físicas e geométricas adotadas para o modelo, as quais têm sido corroboradas por observações experimentais, um único modo crítico clássico é preservado, simplificando assim a análise teórica.

$$\begin{aligned}
 w_p &= \sum_{i=1,3,5} \dots \sum_{j=1,3,5} \dots w_{ij} \operatorname{sen}(iq\xi) \cos(jm\theta) \\
 v_p &= \sum_{i=1,3,5} \dots \sum_{j=1,3,5} \dots v_{ij} \operatorname{sen}(iq\xi) \operatorname{sen}(jm\theta) \\
 u_p &= \sum_{i=1,3,5} \dots \sum_{j=1,3,5} \dots u_{ij} \cos(iq\xi) \cos(jm\theta)
 \end{aligned}$$

MODOS CRÍTICOS

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{k=0,2,4} \dots \sum_{t=0,2,4,\dots} w_{kt} \cos(kq\xi) \cos(tm\theta) \\
 &+ \sum_{k=0,2,4} \dots \sum_{t=2,4,\dots} v_{kt} \cos(kq\xi) \operatorname{sen}(tm\theta) \\
 &+ \sum_{k=2,4} \dots \sum_{t=0,2,4,\dots} u_{kt} \operatorname{sen}(kq\xi) \cos(tm\theta)
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

MODOS SECUNDÁRIOS OU PÓS-CRÍTICOS

Para isso, fixa-se o valor de $i=1$ na parcela de w_p em (III.2), referente ao somatório de modos críticos, e o produto j_m pode ser então substituído por p ondas circunferenciais correspondentes a n semi-ondas longitudinais.

Adotando-se modos secundários [4,6,7] dobrados em relação ao modo crítico clássico, o produto t_m é, assim, substituído por t_p e w_p reescrito da forma

$$w_p = \boxed{w_2 \sin q\xi \cos p\theta} + \sum_{k=0,2,4 \dots} \sum_{t=0,2,4 \dots} w_{kt} \cos(kq\xi) \cos(tp\theta). \quad (\text{III.3a})$$

MODOS CRÍTICOS
ASSIMÉTRICO
CLÁSSICO

Analogamente, para as demais expressões de (III.2), obtêm-se:

$$v_p = \boxed{v_2 \sin q\xi \sin p\theta} + \sum_{k=0,2,4 \dots} \sum_{t=2,4 \dots} v_{kt} \cos(kq\xi) \sin(tp\theta) \quad (\text{III.3b})$$

$$u_p = \boxed{u_2 \cos q\xi \cos p\theta} + \sum_{k=2,4 \dots} \sum_{t=0,2,4 \dots} u_{kt} \sin(kq\xi) \cos(tp\theta). \quad (\text{III.3c})$$

MODOS CRÍTICOS
ASSIMÉTRICOS
CLÁSSICOS

III.2. MODOS CRÍTICOS E SECUNDÁRIOS PARA O PAINEL CILÍNDRICO

Através de experiência numérica [21], verifica-se que os modos de (III.3) atendem aproximadamente às condições de bordo de casca bi-apoiada quando são assumidos pares $(k;t)$ com valores $(0;0)$, $(2;0)$, $(0;2)$, $(2;2)$, $(2;4)$ e $(4;2)$ para w_p , podendo-se ain-

da, eliminar os pares (2;4) e (4;2) em v_p e considerar unicamente o par (2;0) em u_p , além do modo crítico.

Desta maneira, o campo incremental de deslocamentos do painel cilíndrico é dado pelas expressões (III.4), onde os sub-índices 1, 3, 4, 5, 6 e 7 das amplitudes dos modos secundários são associados, respectivamente, aos pares (k;t): (0;0), (2;0), (0;2), (2;2), (2;4) e (4;2) e, o sub-índice 2, ao modo crítico assimétrico clássico.

Para o atendimento da compatibilidade de deformações, introduz-se o termo $u_1 \xi$ em u_p .

Considerando o campo total de deslocamentos do painel cilíndrico \underline{u}_p como a soma de um campo fundamental \underline{u}_p^F (referente a um estado de deformação de membrana) mais o campo incremental de deslocamentos \underline{u}_p^I de (III.4), \underline{u}_p é, então, definido pelas expressões (III.5), onde o sub-índice 0 refere-se ao modo fundamental, ou seja, w_0 e $u_0 \xi$ constituem o estado fundamental de membrana do painel cilíndrico.

As expressões (III.4) e (III.5) são apresentadas no Quadro de Equações III.1.

Quadro III.1 - Campos de deslocamentos para o painel cilíndrico

Campo incremental de deslocamentos do painel cilíndrico - \underline{u}_p^I

MODO SECUNDÁRIO (0;0)	MODO SECUNDÁRIO (2;0)	MODO SECUNDÁRIO (0;2)	MODO SECUNDÁRIO (2;2)	MODO SECUNDÁRIO (2;4)	MODO SECUNDÁRIO (4;2)
$w_p = w_1$	$+ w_2 \text{ sen } q\xi \cos p\theta$	$+ w_3 \cos 2q\xi$	$+ w_4 \cos 2p\theta$	$+ w_5 \cos 2q\xi \cos 2p\theta$	$+ w_6 \cos 2q\xi \cos 4p\theta + w_7 \cos 4q\xi \cos 2p\theta$
$v_p =$	$v_2 \text{ sen } q\xi \text{ sen } p\theta$		$+ v_4 \text{ sen } 2p\theta$	$+ v_5 \cos 2q\xi \text{ sen } 2p\theta$	
$u_p = u_1 \xi$	$+ u_2 \cos q\xi \cos p\theta$	$+ u_3 \text{ sen } 2q\xi$			

(III.4)

Campo total de deslocamentos do painel cilíndrico - $\underline{u}_p = \underline{u}_p^F + \underline{u}_p^I$

MODOS FUNDAMENTAIS
OU PRÉ-CRÍTICOS

MODOS INCREMENTAIS OU PÓS-CRÍTICOS

$w_p = w_0$	$+ w_1 + w_2 \text{ sen } q\xi \cos p\theta + w_3 \cos 2q\xi + w_4 \cos 2p\theta + w_5 \cos 2q\xi \cos 2p\theta + w_6 \cos 2q\xi \cos 4p\theta + w_7 \cos 4q\xi \cos 2p\theta$
$v_p =$	$+ v_2 \text{ sen } q\xi \text{ sen } p\theta + v_4 \text{ sen } 2p\theta + v_5 \cos 2q\xi \text{ sen } 2p\theta$
$u_p = u_0 \xi$	$+ u_1 \xi + u_2 \cos q\xi \cos p\theta + u_3 \text{ sen } 2q\xi$

(III.5)

Com o intuito de se comparar a combinação modal proposta em (III.5) com outras usadas em trabalhos passados [7,10,19,23] introduzem-se, a seguir, as notações

$$w^c(q;p) = w_2 \sin q\xi \cos p\theta \quad (\text{III.6a})$$

e

$$w^s(q;p) = w \cos kq\xi \cos tp\theta \quad , \quad (\text{III.6b})$$

respectivamente, para um modo crítico clássico e para modos secundários em w_p .

Os modos críticos associados à tensão crítica clássica [24] da casca cilíndrica isotrópica, sob compressão axial,

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh_p}{CR} \quad (\text{III.7a})$$

onde

$$C = \sqrt{3 - (1 - \nu^2)} \quad , \quad (\text{III.7b})$$

são definidos por pares $(q;p)$ que determinam uma família de modos dada pela equação [24,7]

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha = 0 \quad , \quad (\text{III.8})$$

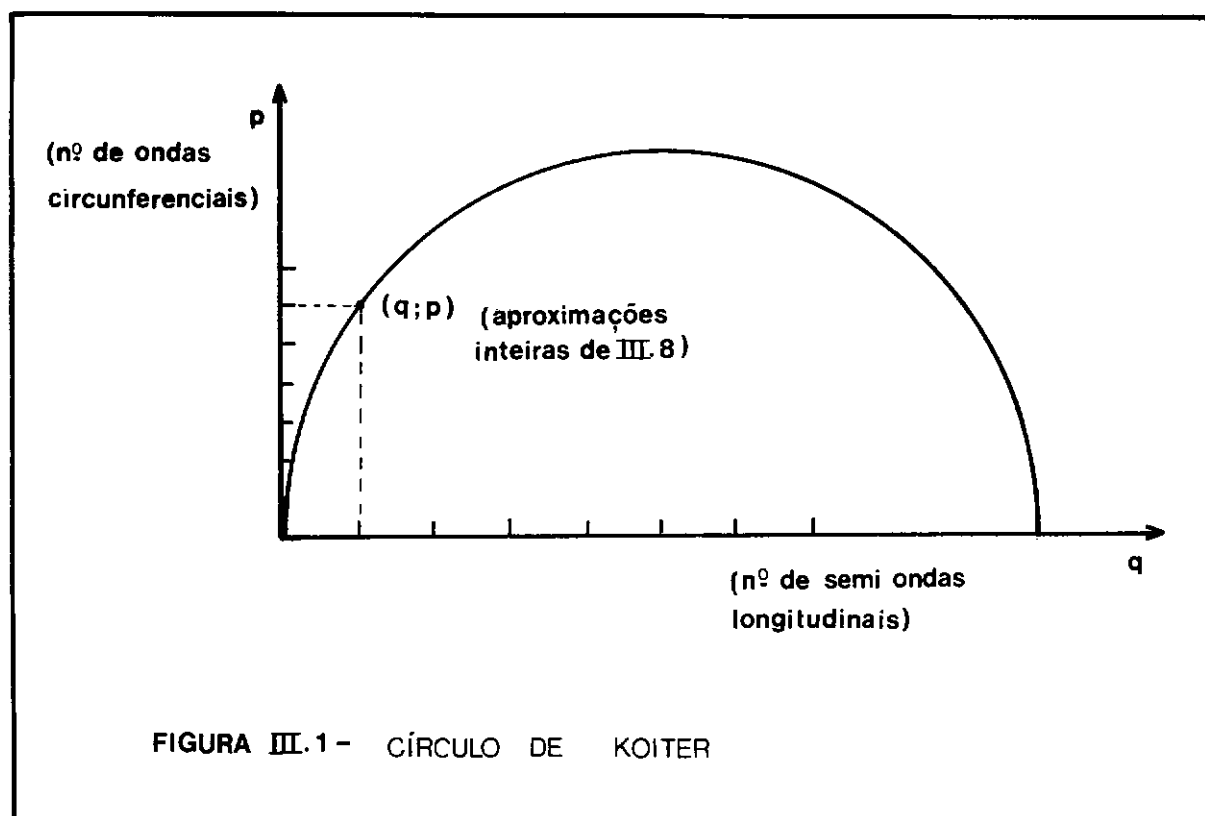
onde

$$\alpha^2 = \frac{Rh_p \pi^2}{2 C L^2} q^2 \quad (\text{III.9a})$$

e

$$\beta^2 = \frac{h_p}{2 C R} p^2 \quad , \quad (\text{III.9b})$$

que é ilustrada através do Círculo de Koiter na figura (III.1).



Tomando-se, por exemplo, dois desses modos, \underline{w}_1 e \underline{w}_2 , conforme definidos em (III.6) e ilustrado na figura (III.2), verifica-se [7] que, individualmente, eles conferem um comportamento pós-crítico **estável** para a casca. Entretanto, quando associados a parâmetros de cargas próximos daquele de carga crítica λ_{cr} , pode ocorrer um acoplamento não-linear entre esses modos, promovendo uma resposta pós-crítica **instável**.

Assim, o comportamento não-linear pós-crítico da casca está associado ao fenômeno da interação não-linear (ou acoplamento) entre os modos críticos e/ou secundários, sendo, portanto, de importância fundamental a seleção adequada da combinação modal, para que o mecanismo de perda de rigidez ou de perda de energia possa ser verificado.



24

O processo de perda de rigidez pela interação não-linear, que ocorre durante a resposta pós-crítica inicial destas cascas, vem sendo reinvestigado recentemente [4,6]. Estes, e outros estudos [7] realizados, têm conduzido ao estabelecimento de modos importantes na formulação matemática do problema. Porém, até agora, esse procedimento tem sido executado de forma intuitiva baseado no mecanismo não-linear, através do qual a rigidez circunferencial de membrana é reduzida com o acréscimo dos deslocamentos radiais.

Os argumentos básicos utilizados nessas últimas referências vêm das primeiras análises teóricas pós-críticas de uma casca cilíndrica, axialmente comprimida, realizadas por KÄRMÄN e TSIEN [2] e DONNELL [1,23]. DONNELL observou que, com o progresso de uma deformação na forma do modo assimétrico $w^c(q;p)$, haveria uma tendência do acoplamento com componentes axissimétricas, de forma tal que a casca pudesse apresentar um comportamento instável caracterizado por perda de rigidez global, como ilustrado na figura (III.2).

Pode-se mostrar [4,6,7,23] que essa combinação modal básica é dada por um modo crítico $w^c(q;p)$ e um modo axissimétrico $w^s(2q;0)$, com duas vezes o número de ondas longitudinais do modo crítico considerado, ou seja,

$$\begin{aligned} \underline{w} &= w^c(q;p) + w^s(2q;0) = \\ &= w_2 \sin q\xi \cos p\theta + w_3 \cos 2q\xi. \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Esse mecanismo de perda de rigidez pode ser descrito, com auxílio da figura (III.3), da forma seguinte [7]:

- (i) Com o crescimento das deformações no modo crítico $w^c(q;p)$, as linhas circunferenciais aa, de deslocamentos nodais máximos, aumentam de comprimento em relação às linhas indeformadas bb, produzindo tensões circunferenciais não-lineares de tração $N_{\theta}''(q;p)$, como indicado na figura (III.3a).
- (ii) Para equilibrar estas tensões de tração $N_{\theta}''(q;p)$, que promoveriam um acréscimo de energia elástica, ocorre uma contração uniforme $w^s(0;0)$ da casca, de magnitude suficiente para que as tensões constantes $N_{\theta}'(0;0)$ aliviem essas tensões não-lineares $N_{\theta}''(q;p)$. Isto conduz, ao longo das linhas bb, a tensões de compressão com valores aproximadamente iguais à tensão média ao longo das linhas aa $[N_{\theta}'(0;0) - \frac{1}{2} N_{\theta}''(q;p)]$. A soma das tensões de tração e compressão $[N_{\theta}''(q;p) + N_{\theta}'(0;0)]$, dadas pelas figuras (III.3a) e (III.3b), promoveria, então, faixas auto-equilibradas de tensões.
- (iii) A ocorrência de um modo axissimétrico $w^s(2q;0)$ conduziria, por outro lado, a faixas alternadas de tensões circunferenciais lineares $N_{\theta}'(2q;0)$ como mostrado na figura (III.3c). Estas tensões $N_{\theta}'(2q;0)$ contrabalanciariam, então, as tensões $[N_{\theta}''(q;p) + N_{\theta}'(0;0)]$, bem como permitiriam um melhor atendimento das condições de contorno em w_p .

Os resultados numéricos obtidos com análises linearizada e não-linear, realizadas por BATISTA [4] e ANTONINI [7], demonstram que a perda de rigidez durante o processo não-linear é alcançada quando o par de modos da expressão (III.10) é utilizada

do.

A contração radial uniforme $w^s(0;0)$, observada experimentalmente, é, entretanto, naturalmente eliminada na análise teórica não-linear [4,6,7].

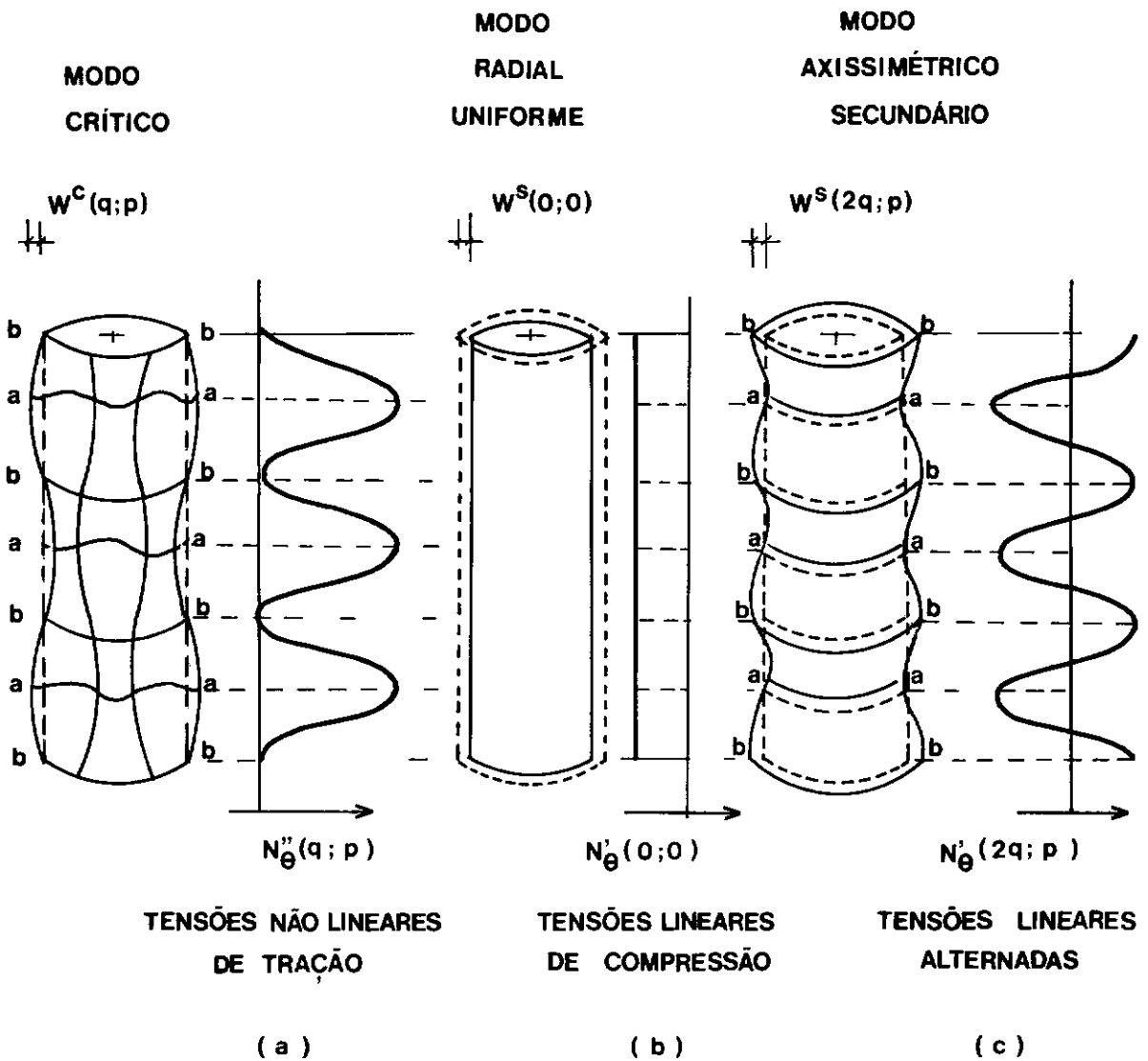


FIGURA III.3 - MECANISMO DE PERDA DE RIGIDEZ

Uma breve comparação entre os vários campos de deslocamentos, que têm sido adotados para a solução deste problema não-linear, pode ser realizada observando-se as equações (III.11) do Quadro III.2, tomando-se como referência a equação (III.11a), que é a solução matemática apresentada em (III.3a).

Nota-se que a solução modal proposta por KÄRMÄN e TSIEN [2], dada pela equação (III.11c), atendendo à formulação geral proposta por DONNELL em (III.11b), não inclui o modo crítico assimétrico clássico $w^c(q;p)$. Inclui, entretanto, um modo de ondas curtas assimétrico $(k;t)$ associado a estágios avançados de deformação pós-crítica. Esta última forma modal pode ser observada experimentalmente num estágio pós-flambagem avançado e é comumente referida na literatura como *diamond* ou *checkerboard shape*, conforme ilustração na figura (III.4). Além disso, a solução modal proposta por Kärman inclui, também, pares $(0;0)$, $(2;0)$ e $(0;2)$.

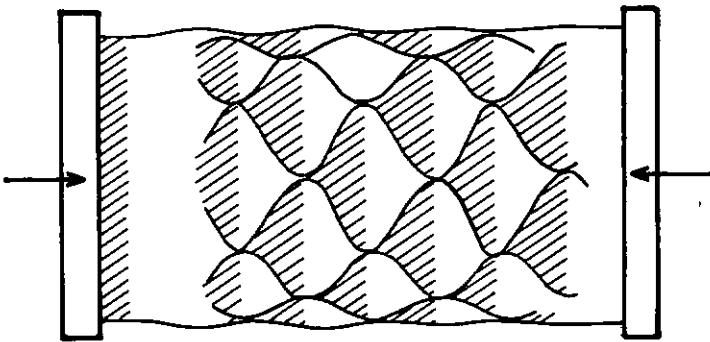


FIGURA III.4 - ESTÁGIO AVANÇADO PÓS-FLAMBAGEM

Soluções modais na forma proposta pela referência. [2]
 conduzem a respostas não-lineares semelhantes à curva da figura (III.5a), referente a "4 termos". Uma extensão desta mesma proposta de solução, com a inclusão de outros pares $(k;t)$, foi feita por ALMROTH [25]. As respostas por ele obtidas fornecem as demais curvas desta mesma figura (III.5a), as quais apresentam certos contrastes com as obtidas por DONNELL, mostradas na figura (III.5b). Estes contrastes, apontados por DONNELL, parecem se referir somente a rigidez pós-crítica inicial, a qual é de fundamental importância como indicadora do grau de sensibilidade a imperfeições geométricas e, conseqüentemente, na estimativa da carga de flambagem.

Estimativas de reduções das cargas de flambagem, em presença de imperfeições geométricas iniciais, foram feitas independentemente por DONNELL [1] e KOITER [3], adotando respectivamente, formas modais de imperfeições com características de modos secundários e críticos.

As curvas de ALMROTH apresentam uma tendência assintótica a um mesmo patamar, a medida em que é aumentado o número de termos em w_p (vide Quadro de Equações III.2, equação (III.11c)). Este fato é devido, possivelmente, a adoção exclusiva dos modos secundários de ondas curtas longitudinais e circunferenciais (vide figura (III.4)), que dominam o processo não-linear em estágios avançados pós-críticos.

Quadro III.2 - Soluções propostas para w_p^I

$$w_p^I = \boxed{w_2 \sin q\xi \cos p\theta} + \boxed{\sum_{k=0,2,4 \dots} \sum_{t=0,2,4 \dots} w \cos kq\xi \cos tp\theta} \quad \text{GONÇALVES [21]} \quad \text{(III.11a)}$$

MODO CRÍTICO ASSIMÉTRICO CLÁSSICO MODOS SECUNDÁRIOS OU PÓS-CRÍTICOS Solução matemática do problema

$w^C(q;p)$ $w^S(q;p)$ ou $(k;t)$

DONNELL [25]

$$w_p^I = \sum_k \sum_t w_{kt} \cos kq\xi \cos tp\theta \quad \text{(III.11b)}$$

KÄRMÄN e TSIEN [3]

$$w_p^I = w_1 + w_3 \cos 2q\xi + w_4 \cos 2p\theta + w \cos q\xi \cos p\theta \quad \text{(III.11c)}$$

ANTONINI e BATISTA [7]

$$w_p^I = w_2 \sin q\xi \cos p\theta + w_1 + w_3 \cos 2q\xi + w_4 \cos 2p\theta + w_5 \cos 2q\xi \cos 2p\theta \quad \text{(III.11d)}$$

SYNGELLAKIS e WALKER [22]

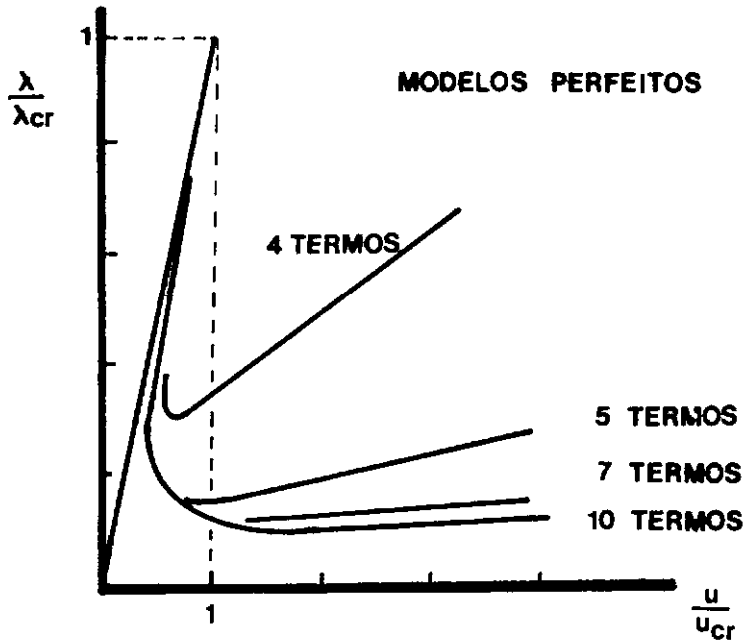
$$w_p^I = w_2 \sin q\xi \cos p\theta + w_1 + w \sin q\xi \sin 2p\theta \quad \text{(III.11e)}$$

JUSTINO e BATISTA [10]

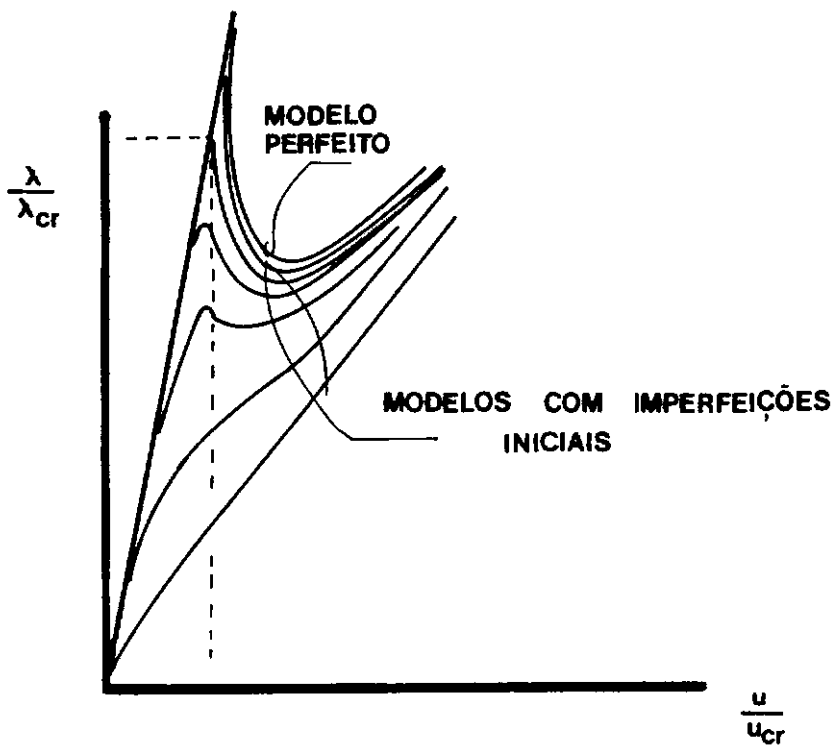
$$w_p^I = w_2 \sin q\xi \cos p\theta + w_1 + w_3 \cos 2q\xi \quad \text{(III.11f)}$$

SOLUÇÃO PROPOSTA NESTE TRABALHO

$$w_p^I = w_2 \sin q\xi \cos p\theta + w_1 + w_3 \cos 2q\xi + w_4 \cos 2p\theta + w_5 \cos 2q\xi \cos 2p\theta + w_6 \cos 2q\xi \cos 4p\theta + w_7 \cos 4q\xi \cos 2p\theta \quad \text{(III.11g)}$$



(a) ALMROTH [25]



(b) DONNELL e WAN [24]

FIGURA III. 5 - ASPECTOS DOS CAMINHOS DE EQUILÍBRIO DE CASCAS CILÍNDRICAS ISOTRÓPICAS

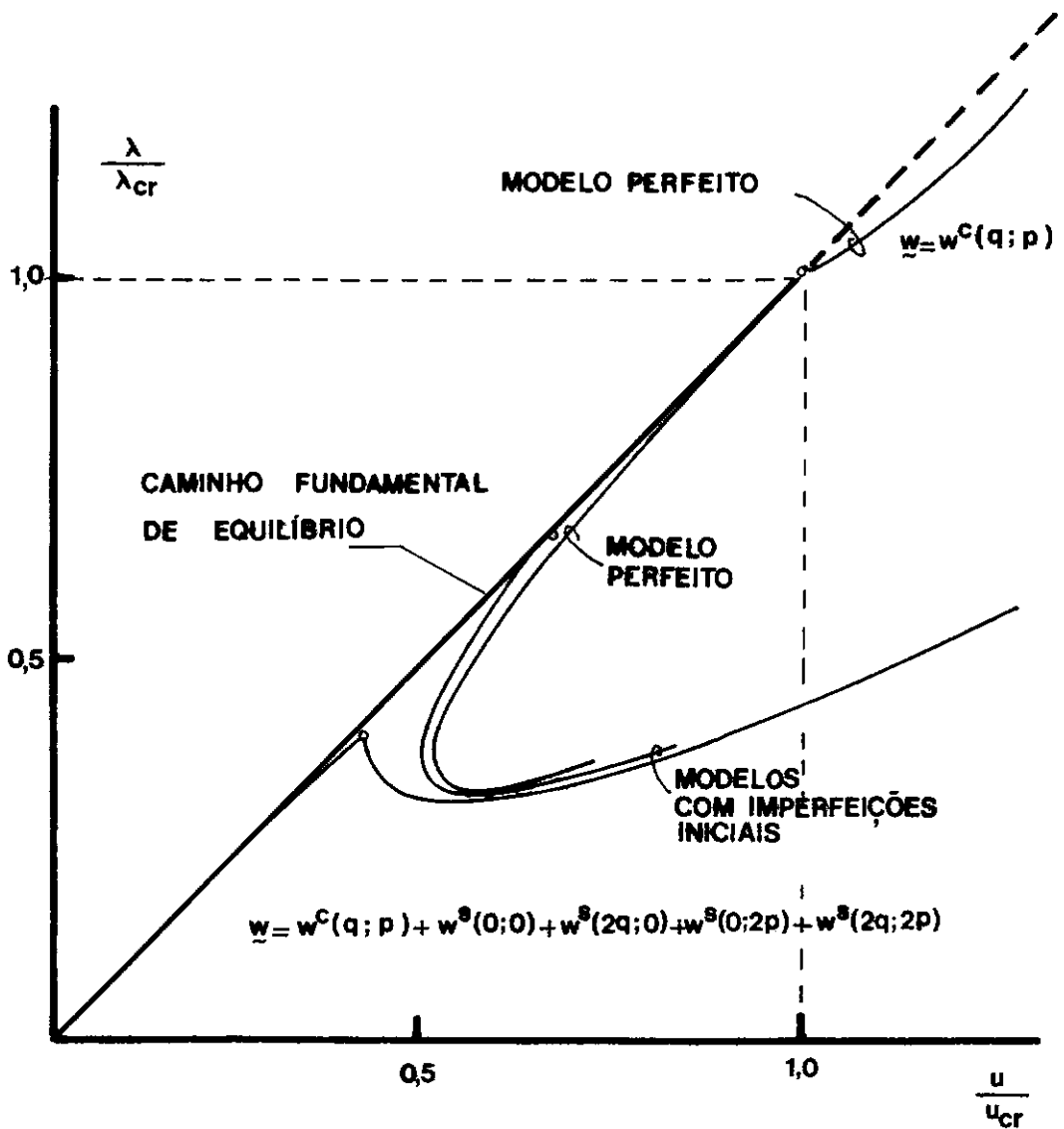


FIGURA III.6 - CAMINHOS DE EQUILÍBRIO DE CASCA CILÍNDRICA ISOTRÓPICA [7]

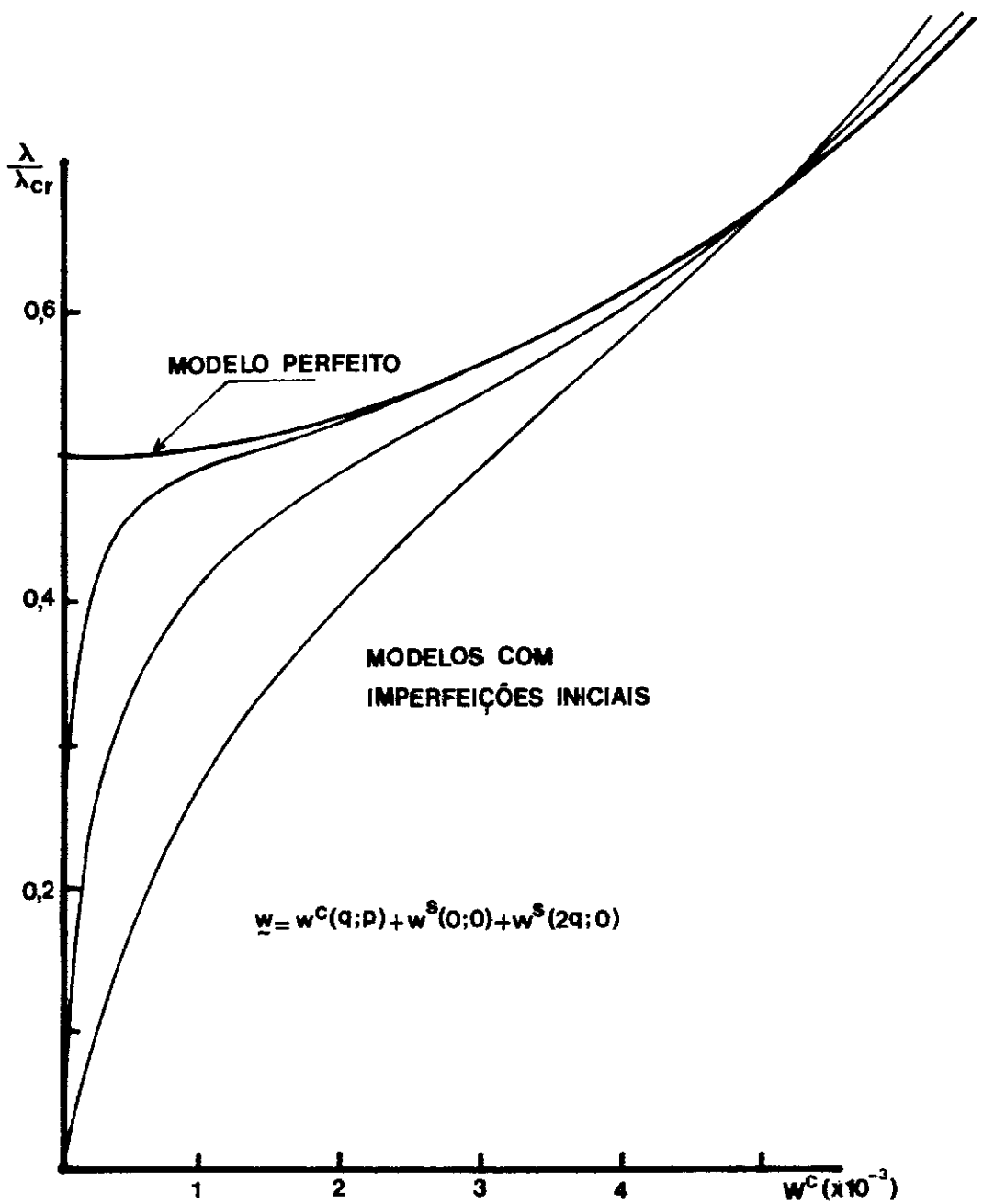


FIGURA III 7- CAMINHOS DE EQUILÍBRIO DE CASCA CILÍNDRICA ENRIJECEIDA LONGITUDINALMENTE [10]

A solução (III.11d) atende aos argumentos de DONNELL anteriormente apresentados, mas inclui o modo crítico assimétrico clássico além dos modos secundários $(k;t)$: $(0;0)$, $(2;0)$, $(0;2)$ e $(2;2)$, todos pertencentes à solução matemática (III.11a).

Os resultados gerados pela adoção desta solução [7], apresentados na figura (III.6), permitem verificar uma resposta da casca cilíndrica isotrópica muito próxima da obtida com a forma modal (III.11b) proposta por DONNELL. Observa-se nestas respostas não-lineares pós-críticas um ganho de rigidez em estágios avançados de deformação. Fenômeno também observado por BATISTA [4], através de ensaios sob controle de encurtamento axial, antes da ocorrência de plastificação na forma da figura (III.4).

Dando prosseguimento ao trabalho de referência [7], analisando, então, casca cilíndrica enrijecida longitudinalmente, BATISTA propôs a adoção das formas modais básicas (III.11f) para análise não-linear deste tipo de cascas e, ainda, na pesquisa de pontos de bifurcação, utilizou o modo $w^c(q;2p)$, também constante na solução proposta por SYNGELLAKIS e WALKER [19], apresentada na equação (III.11e). Entretanto, este modo adicional não pertence à solução matemática (III.11a).

As respostas não-lineares, assim obtidas, são dadas pelas curvas da figura III.7. Chama-se a atenção para o fato de que, nesta forma de solução, não foi verificado, para qualquer geometria, um comportamento instável da casca cilíndrica enrijecida.

Finalmente, o Quadro de Equações III.2 faz referência aos modos constantes da solução proposta neste trabalho, equa-

ção (III.11g), combinando os modos secundários que conduzem aproximadamente ao atendimento das condições de contorno de casca bi-apoiada.

Enfatiza-se que, tão importante quanto a inclusão de modos de imperfeições geométricas iniciais, é a combinação modal a ser considerada na formulação da resposta não-linear dessas estruturas; e que, a aqui adotada, resulta da solução geral das equações diferenciais que regem o problema.

III.3. MODOS CRÍTICOS E SECUNDÁRIOS PARA O ENRIJECEDOR

Os modos de deslocamentos para o enrijecedor são definidos como funções do campo de deslocamentos do painel cilíndrico pela aplicação dos modos (III.4), em $\theta=\theta_0$, nas equações (II.6).

Assim, observando que

$$\begin{aligned}
 w_p \Big|_{\theta=\theta_0} &= w_1 - w_4 + (w_3 - w_5 + w_6) \cos 2q\xi - w_7 \cos 4q\xi \\
 w_{p,\xi} \Big|_{\theta=\theta_0} &= - (w_3 - w_5 + w_6) 2q \sin 2q\xi + w_7 4q \sin 4q\xi \\
 w_{p,\beta} \Big|_{\theta=\theta_0} &= - w_2 p \sin q\xi \\
 v_p \Big|_{\theta=\theta_0} &= v_2 \sin q\xi \\
 u_p \Big|_{\theta=\theta_0} &= u_1 \xi + u_3 \sin 2q\xi
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

e substituindo em (II.6), chega-se a

$$u_s = u_1 \xi + [u_3 + (w_3 - w_5 + w_6) (\zeta - \epsilon) 2q] \sin 2q\xi - w_7 4q \sin 4q\xi$$

$$v_s = [v_2 + w_2 (\zeta - \epsilon) p] \sin q\xi \quad (\text{III.13})$$

$$w_s = (1 + \zeta - \epsilon) [w_1 - w_4 + (w_3 - w_5 + w_6) \cos 2q\xi - w_7 \cos 4q\xi] .$$

III.4. INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NOS CAMPOS DE DESLOCAMENTOS

Embora o campo de deslocamentos u_p definido pelas expressões (III.4) já conduza a uma aproximação das condições de bordo de casca bi-apoiada, algumas das condições de contorno definidas (II.7) podem ser utilizadas de forma a forçar este campo de deslocamentos a atender, rigorosamente, às condições de apoio simples.

Assim, aplicando-se, de (II.7), as equações

$$u_{p,\xi} = 0 \quad (\text{i})$$

$$v_p = 0 \quad (\text{ii})$$

$$w_p = 0 \quad (\text{iii})$$

$$w_{p,\xi\xi} = 0 \quad (\text{iv})$$

em $\xi=0$ e $\xi=\ell$, obtêm-se:

$$\text{de (i): } u_1 = -2q u_3 \quad (\text{III.14})$$

$$\text{de (ii): } (v_4 + v_5) \sin 2p\theta = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore v_4 = -v_5, \quad (\text{III.15})$$

condição forçada pela continuidade do campo de deslocamentos;

$$\begin{aligned} \text{de (iii): } w_1 + w_3 + w_4 \cos 2p\theta + w_5 \cos 2p\theta + w_6 \cos 4p\theta + \\ + w_7 \cos 2p\theta = 0; \end{aligned} \quad (\text{v})$$

$$\text{de (iv): } -4q^2 (w_3 + w_5 \cos 2p\theta + w_6 \cos 4p\theta + 4w_7 \cos 2p\theta) = 0; \quad (\text{vi})$$

$$\text{e, de (v) e (vi): } w_4 = \frac{3 w_7 \cos 2p\theta - w_1}{\cos 2p\theta} \quad \therefore$$

$$\therefore w_4 = 3 w_7 - \frac{w_1}{\cos 2p\theta}, \quad (\text{III.16})$$

condição também forçada pela continuidade do campo de deslocamentos.

As relações (III.14) a (III.16) substituídas em (III.4) fornecem para o campo de deslocamentos do painel cilíndrico:

$$u_p = u_2 \cos q\xi \cos p\theta + u_3 (\sin 2q\xi - 2q\xi)$$

$$v_p = v_2 \sin q\xi \sin p\theta + v_5 (\cos 2q\xi - 1) \sin 2p\theta \quad (\text{III.17})$$

$$w_p = w_2 \sin q\xi \cos p\theta + (w_3 + w_5 \cos 2p\theta +$$

$$+ w_6 \cos 4p\theta) \cos 2q\xi + w_7 (\cos 4q\xi + 3) \cos 2p\theta$$

e, substituídas em (III.13), fornecem para o campo de deslocamentos do enrijecedor:

$$u_s = u_3 (\sin 2q\xi - 2q\xi) + (\zeta - \varepsilon) [(w_3 - w_5 + w_6) 2q \sin 2q\xi - w_7 4q \sin 4q\xi]$$

$$v_s = v_2 \sin q\xi + (\zeta - \varepsilon) w_2 p \sin q\xi \quad (\text{III.18})$$

$$w_s = (1 + \zeta - \varepsilon) [(w_3 - w_5 + w_6) \cos 2q\xi - w_7 (\cos 4q\xi + 3)] .$$

CAPÍTULO IV

MONTAGEM DO FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL

IV.1. ENERGIA POTENCIAL TOTAL DO SISTEMA PAINEL-ENRIJECADOR

IV.1.1. ENERGIAS DE DEFORMAÇÃO ELÁSTICA

Painel Cilíndrico:

A energia potencial elástica do painel cilíndrico é definida através das considerações simplificadoras da teoria clássica de cascas de LOVE-KIRCHHOFF e pela utilização das relações cinemáticas da teoria não-linear de DONNELL-MUSHTARI-VLASOV para cascas esbeltas abatidas, pelas expressões [26]:

$$u_p = \frac{R}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [N_x \epsilon_x + N_\theta \epsilon_\theta + 2 N_{x\theta} \epsilon_{x\theta}] + (M_x \chi_x + M_\theta \chi_\theta + 2 M_{x\theta} \chi_{x\theta})] d\theta dx \quad (IV.1)$$

ou

$$\begin{aligned}
 u_p = & \frac{KR}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [\epsilon_x^2 + \epsilon_\theta^2 + 2 \nu \epsilon_x \epsilon_\theta + 2(1-\nu) \epsilon_{x\theta}^2] d\theta dx + \\
 & + \frac{DR}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [\chi_x^2 + \chi_\theta^2 + 2 \nu \chi_x \chi_\theta + 2(1-\nu) \chi_{x\theta}^2] d\theta dx ,
 \end{aligned} \tag{IV.2}$$

de onde se observa a hipótese de LOVE, ou seja, que a energia de deformação elástica pode ser tomada como a soma das energias de membrana e flexão, descritas como funções quadráticas das deformações específicas e mudanças de curvatura medidas com referência ao painel indeformado. Isto é,

$$u_p = u_{pm} + u_{pf} , \tag{IV.3}$$

sendo a parcela de energia extensional

$$u_{pm} = \frac{KR}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [\epsilon_x^2 + \epsilon_\theta^2 + 2 \nu \epsilon_x \epsilon_\theta + 2(1-\nu) \epsilon_{x\theta}^2] d\theta dx \tag{IV.4a}$$

e, a parcela de energia flexional

$$u_{pf} = \frac{DR}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [\chi_x^2 + \chi_\theta^2 + 2 \nu \chi_x \chi_\theta + 2(1-\nu) \chi_{x\theta}^2] d\theta dx . \tag{IV.4b}$$

Para as direções positivas de deslocamentos mostrados na figura (IV.1), as deformações específicas da superfície média da casca são dadas por

$$\epsilon_x = u_{p,x} + \frac{1}{2} (-w_{p,x})^2$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} [v_{p,\theta} + w_p + \frac{1}{2R} (-w_{p,\theta})^2] \quad (\text{IV.5})$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R} u_{p,\theta} + v_{p,x} + \frac{1}{R} w_{p,x} w_{p,\theta} \right],$$

e as mudanças de curvatura, por

$$\chi_x = -w_{p,xx}$$

$$\chi_\theta = -\frac{1}{R^2} w_{p,\theta\theta} \quad (\text{IV.6})$$

$$\chi_{x\theta} = -\frac{1}{R} w_{p,x\theta}$$

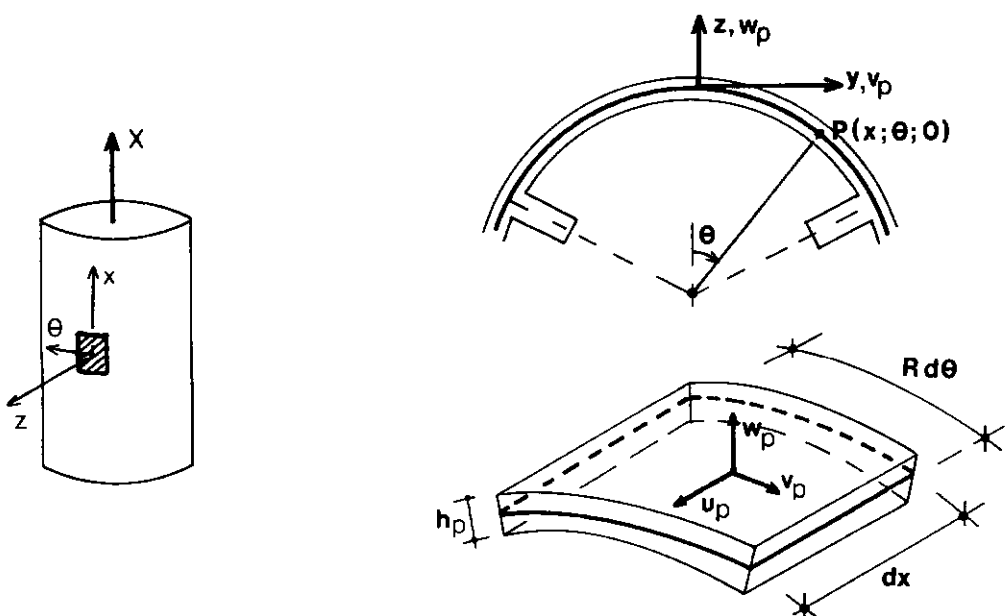


FIGURA IV.1 - ELEMENTO INFINITESIMAL DO PAINEL CILÍNDRICO

E, ainda, como na figura (IV.2), as resultantes internas de esforços de membrana e momentos por unidade de comprimento, referidos à superfície média, são dadas através das relações constitutivas

$$N_x = K (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta)$$

$$N_\theta = K (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \quad (IV.7)$$

$$N_{x\theta} = K (1 - \nu) \epsilon_{x\theta}$$

e

$$M_x = D (\chi_x + \nu \chi_\theta)$$

$$M_\theta = D (\chi_\theta + \nu \chi_x) \quad (IV.8)$$

$$M_{x\theta} = D (1 - \nu) \chi_{x\theta} ,$$

onde (x, θ, o) são coordenadas locais, (U_p, V_p, W_p) são os deslocamentos correspondentes, R é o raio da superfície média do painel cilíndrico e K e D , respectivamente, a rigidez extensional e a rigidez a flexão do painel,

$$K = \frac{E h_p}{1 - \nu^2} \quad (IV.9)$$

e

$$D = \frac{E h_p^3}{12 (1 - \nu^2)} , \quad (IV.10)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e, ν , o seu coeficiente de Poisson.

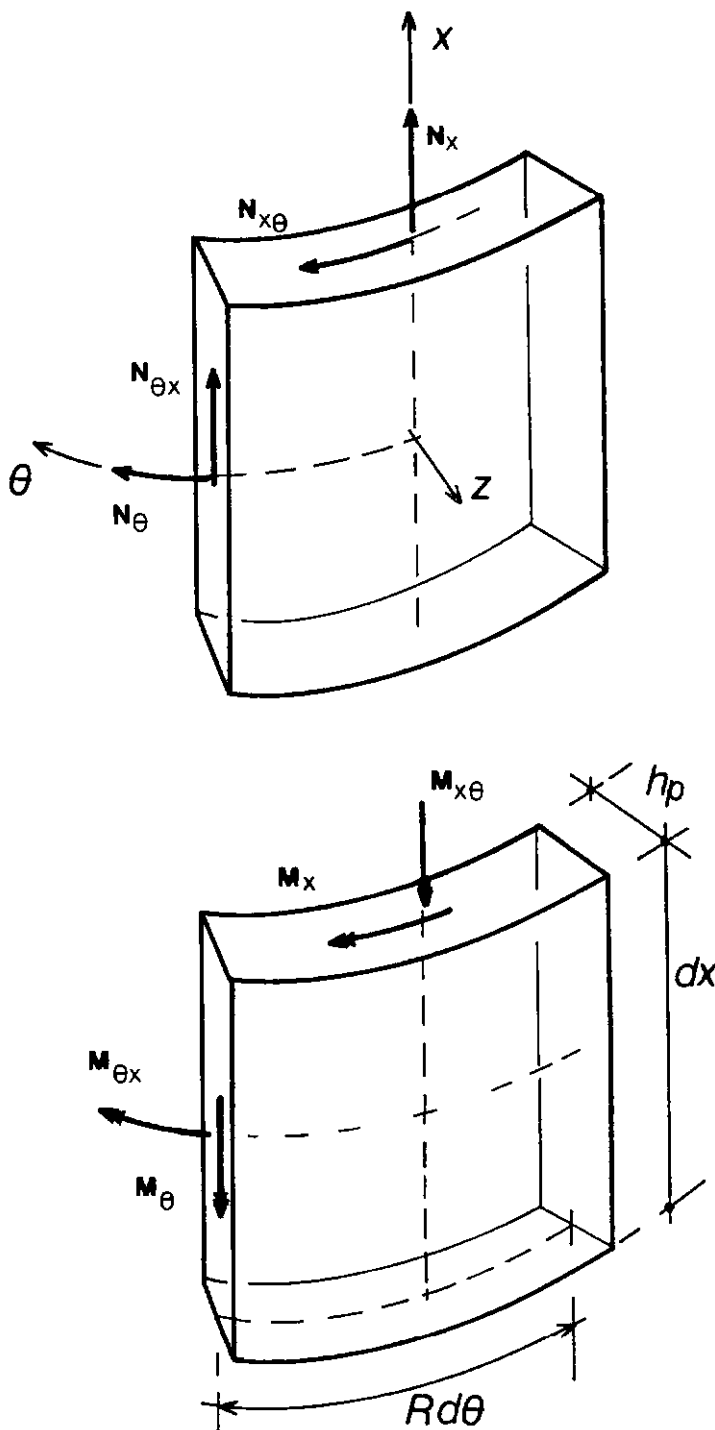


FIGURA IV.2 - RESULTANTES INTERNAS DE MEMBRANA E DE FLEXÃO NO ELEMENTO INFINITESIMAL DO PAINEL CILÍNDRICO

Enrijecedor Longitudinal:

O enrijecedor analisado como placa, conforme figura (IV.3), tem seu funcional de energia potencial elástica, também referido a sua superfície média, estabelecido pela teoria não-linear de VON KÄRMÄN [26].

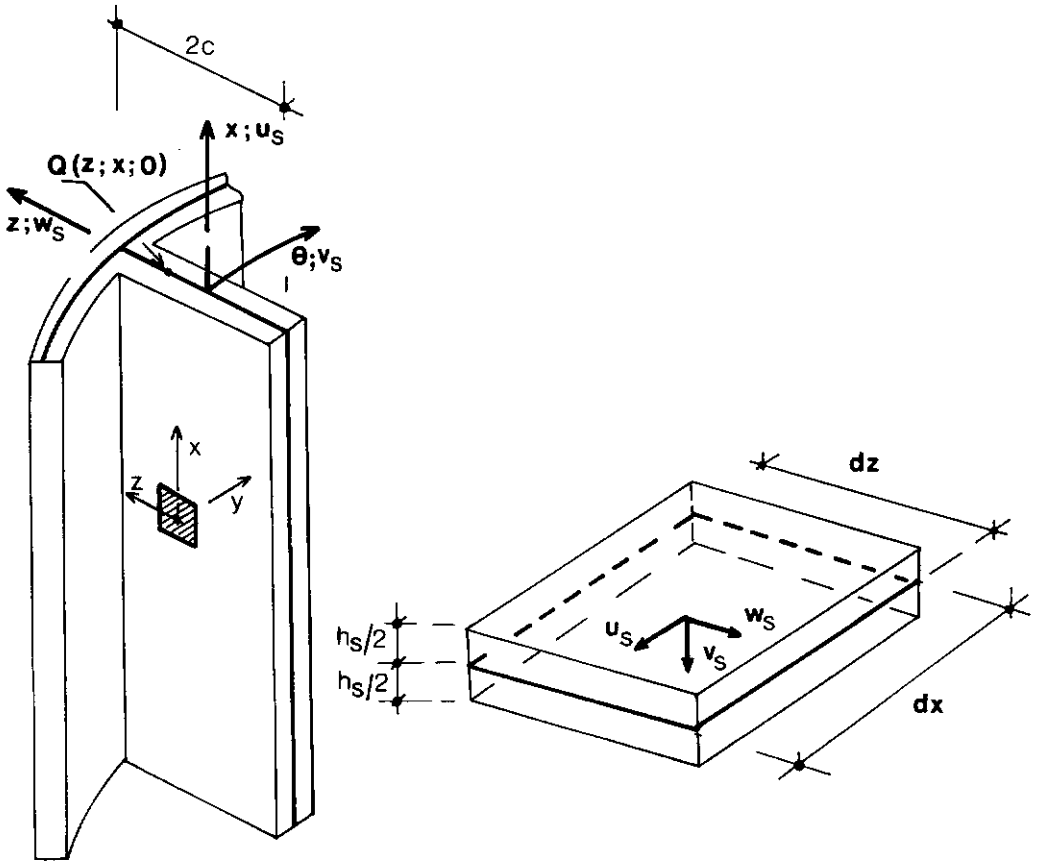


FIGURA IV.3 - ELEMENTO INFINITESIMAL DO ENRIJECADOR

Assim, tem-se

$$U_S = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-c}^c [(N_Z \epsilon_Z + N_X \epsilon_X + 2 N_{ZX} \epsilon_{ZX}) + (M_Z \chi_Z + M_X \chi_X + 2 M_{ZX} \chi_{ZX})] dz dx \quad (IV.11)$$

ou

$$u_s = u_{sm} + u_{sf} \quad (\text{IV.12a})$$

onde

$$u_{sm} = \frac{\eta K}{2} \int_0^L \int_{-c}^c [\epsilon_z^2 + \epsilon_x^2 + 2\nu \epsilon_z \epsilon_x + 2(1-\nu) \epsilon_{zx}^2] dz dx \quad (\text{IV.12b})$$

e

$$u_{sf} = \frac{\eta^3 D}{2} \int_0^L \int_{-c}^c [\chi_z^2 + \chi_x^2 + 2\nu \chi_z \chi_x + 2(1-\nu) \chi_{zx}^2] dz dx, \quad (\text{IV.12c})$$

quando as deformações específicas são dadas por

$$\epsilon_z = w_{s,z} + \frac{1}{2} (v_{s,z})^2$$

$$\epsilon_x = u_{s,x} + \frac{1}{2} (v_{s,x})^2 \quad (\text{IV.13})$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} (w_{s,x} + u_{s,z} + v_{s,z} v_{s,x})$$

as mudanças de curvatura, por

$$\chi_z = -v_{s,zz}$$

$$\chi_x = -v_{s,xx} \quad (\text{IV.14})$$

$$\chi_{zx} = -v_{s,zx}$$

e, como apresentadas na figura (IV.4), as resultantes de esforços internos de membrana e momentos internos ao longo dos bordos do elemento infinitesimal, dadas pelas relações constitutivas

$$\begin{aligned} N_z &= \eta K (\epsilon_z + \nu \epsilon_x) \\ N_x &= \eta K (\epsilon_x + \nu \epsilon_z) \\ N_{zx} &= \eta K (1 - \nu) \epsilon_{zx} \end{aligned} \quad (IV.15)$$

e

$$\begin{aligned} M_z &= \eta^3 D (\chi_z + \nu \chi_x) \\ M_x &= \eta^3 D (\chi_x + \nu \chi_z) \\ M_{zx} &= \eta^3 D (1 - \nu) \chi_{zx} , \end{aligned} \quad (IV.16)$$

onde, agora, (z, x, o) são as coordenadas de um ponto qualquer da superfície média do enrijecedor, (W_s, U_s, V_s) são os deslocamentos correspondentes e

$$\eta = \frac{h_s}{h_p} \quad (IV.17)$$

é um parâmetro adimensional que relaciona, tanto a rigidez extensiva, quanto a rigidez flexional do enrijecedor, com aquelas correspondentes do painel cilíndrico.

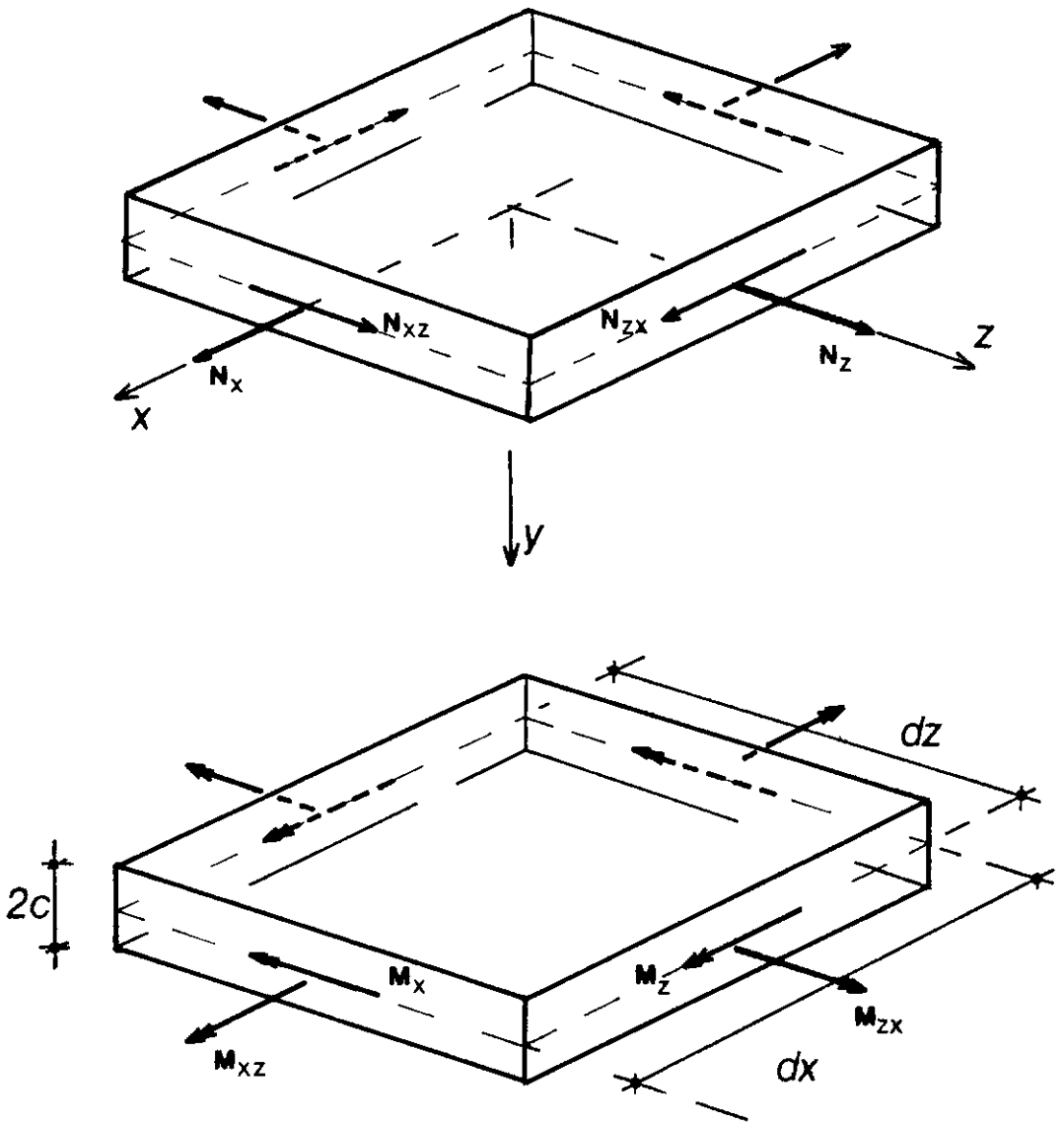


FIGURA IV.4 - RESULTANTES INTERNAS DE MEMBRANA E FLEXÃO NO ELEMENTO INFINITESIMAL DO ENRIJECEDOR

IV.1.2. POTENCIAIS DE CARGAS EXTERNAS

No que se segue, é admitida uma distribuição de tensões normais compressivas σ constante nos bordos extremos da casca, tanto ao longo dos painéis cilíndricos, quanto ao longo dos enrijecedores, gerada pelo carregamento axial P imposto à estrutura.

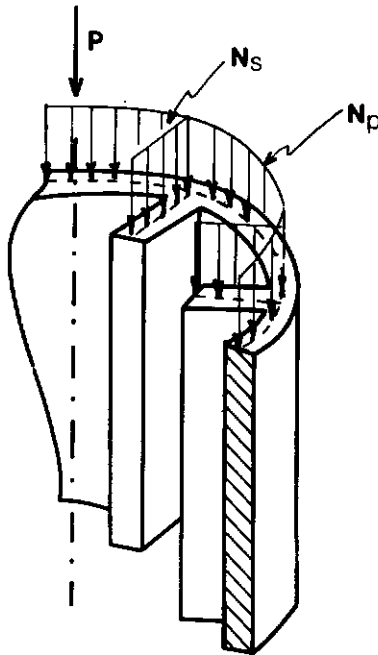


FIGURA IV.5 - DISTRIBUIÇÃO DO CARREGAMENTO AXIAL P AO LONGO DOS BORDOS DA CASCA

Chamando, conforme a figura (IV.5), de N_p e N_s as resultantes por unidade de comprimento de tensão axial ao longo dos bordos extremos de um painel cilíndrico e de um enrijecedor, respectivamente, e de P_p e P_s as parcelas de P atuantes em cada um destes elementos da estrutura, tem-se:

$$(i) \quad N_p = - \sigma h_p \quad (a)$$

$$N_s = - \sigma h_s \quad (b)$$

$$(ii) P = N(P_p + P_s) = N_p 2 \pi R + N_s 2c \quad N \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad P_p = N_p 2R \theta_0 \quad (c)$$

$$P_s = N_s 2c \quad , \quad (d)$$

onde N é o número de painéis ou enrijecedores.

Sendo U_p o deslocamento axial do painel cilíndrico, usando (a) e (c), a parcela de energia potencial de carga externa a ele as sociada fica

$$\Omega_p = - P_p \int_0^L U_{p,x} dx = \sigma h_p R \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} U_{p,x} d\theta dx ; \quad (IV.18)$$

e sendo U_s o deslocamento axial do enrijecedor, através de (b) e (d), a parcela de energia potencial de carga externa associada a este elemento é

$$\Omega_s = - P_s \int_0^L U_{s,x} dx = \sigma h_s \int_0^L \int_{-c}^c U_{s,x} dz dx . \quad (IV.19)$$

Pela introdução do parâmetro adimensional η e o parâmetro de carga

$$\lambda = \frac{\sigma}{E} (1 - \nu^2) , \quad (IV.20)$$

a energia potencial de carga externa é reescrita para o painel cilíndrico como

$$\Omega_p = K R \lambda \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} U_{p,x} d\theta dx \quad (IV.21)$$

e, para o enrijecedor,

$$\Omega_s = \eta K \lambda \int_0^L \int_{-c}^c U_{s,x} dz dx . \quad (\text{IV.22})$$

IV.1.3. EXPRESSÕES DAS ENERGIAS POTENCIAIS TOTAIS

A energia potencial total do sistema painel-enrijecedor é dada por

$$V = U + \Omega , \quad (\text{IV.23})$$

onde U é a energia interna de deformação elástica,

$$U = U_p + U_s , \quad (\text{IV.24})$$

e Ω é o potencial de cargas externas,

$$\Omega = \Omega_p + \Omega_s , \quad (\text{IV.25})$$

ou

$$V = V_p + V_s , \quad (\text{IV.26})$$

onde V_p é a energia potencial total do painel cilíndrico e, V_s , a do enrijecedor.

Assumindo as expressões definidas nos itens anteriores, tem-se, com as equações (IV.2), (IV.12), (IV.21) e (IV.22),

$$\begin{aligned}
U_p = \frac{R}{2} \int_0^L \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{ & K [\epsilon_x^2 + \epsilon_\theta^2 + 2 \nu \epsilon_x \epsilon_\theta + 2(1-\nu) \epsilon_{x\theta}^2] + \\
& + D [\chi_x^2 + \chi_\theta^2 + 2 \nu \chi_x \chi_\theta + 2(1-\nu) \chi_{x\theta}^2] + \\
& + 2 K \lambda U_{p,x} \} d\theta dx
\end{aligned}
\tag{IV.27}$$

e

$$\begin{aligned}
U_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-c}^c \{ & \eta K [\epsilon_z^2 + \epsilon_x^2 + 2 \nu \epsilon_z \epsilon_x + 2(1-\nu) \epsilon_{zx}^2] + \\
& + \eta^3 D [\chi_z^2 + \chi_x^2 + 2 \nu \chi_z \chi_x + 2(1-\nu) \chi_{zx}^2] + \\
& + 2 \eta K \lambda U_{s,x} \} dz dx
\end{aligned}
\tag{IV.28}$$

IV.2. NORMALIZAÇÃO DOS FUNCIONAIS DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL

As normalizações dos funcionais das equações (IV.27) e (IV.28) são realizadas, em relação ao raio R , pelo estabelecimento de um referencial adimensional dado pelas novas coordenadas locais adimensionais

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{x}{R} \\
\theta &= \frac{y}{R} \\
\zeta &= \frac{z}{R}
\end{aligned}
\tag{IV.29}$$

e pelos campos de deslocamentos adimensionais

$$u_p = \frac{U_p}{R}$$

$$v_p = \frac{V_p}{R} \quad (\text{IV.30})$$

$$w_p = \frac{W_p}{R} ,$$

para o painel cilíndrico, e

$$u_s = \frac{U_s}{R}$$

$$v_s = \frac{V_s}{R} \quad (\text{IV.31})$$

$$w_s = \frac{W_s}{R} ,$$

para o enrijecedor.

Definindo

$$\ell = \frac{L}{R} \quad (\text{IV.32})$$

como o comprimento adimensional da casca, a aplicação destes parâmetros adimensionais na equação (IV.27) e nas demais relações do painel cilíndrico fornece:

$$\begin{aligned}
 V_p = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{\theta_0}^{\theta_0} \{ & K [\epsilon_\xi^2 + \epsilon_\theta^2 + 2 \nu \epsilon_\xi \epsilon_\theta + 2(1-\nu) \epsilon_{\xi\theta}^2] + \\
 & + D [\chi_\xi^2 + \chi_\theta^2 + 2 \nu \chi_\xi \chi_\theta + 2(1-\nu) \chi_{\xi\theta}^2] + \\
 & + 2 K \lambda u_{p,\xi} \} d\theta d\xi
 \end{aligned}
 \tag{IV.33}$$

e as novas relações adimensionais a seguir descritas.

Relações deformação-deslocamento:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\xi &= u_{p,\xi} + \frac{1}{2} (w_{p,\xi})^2 \\
 \epsilon_\theta &= v_{p,\theta} + w_p + \frac{1}{2} (w_{p,\theta})^2
 \end{aligned}
 \tag{IV.34}$$

$$\epsilon_{\xi\theta} = \frac{1}{2} (u_{p,\theta} + v_{p,\xi} + w_{p,\xi} w_{p,\theta}) .$$

Mudanças de curvatura:

$$\begin{aligned}
 \chi_\xi &= - \frac{1}{R} w_{p,\xi\xi} \\
 \chi_\theta &= - \frac{1}{R} w_{p,\theta\theta}
 \end{aligned}
 \tag{IV.35}$$

$$\chi_{\xi\theta} = - \frac{1}{R} w_{p,\xi\theta} .$$

Relações constitutivas:

$$N_{\xi} = K (\varepsilon_{\xi} + \nu \varepsilon_{\theta})$$

$$N_{\theta} = K (\varepsilon_{\theta} + \nu \varepsilon_{\xi}) \quad (\text{IV.36a})$$

$$N_{\xi\theta} = K (1 - \nu) \varepsilon_{\xi\theta}$$

e

$$M_{\xi} = D (\chi_{\xi} + \nu \chi_{\theta})$$

$$M_{\theta} = D (\chi_{\theta} + \nu \chi_{\xi}) \quad (\text{IV.36b})$$

$$M_{\xi\theta} = D (1 - \nu) \chi_{\xi\theta} .$$

Considerando

$$\gamma = \frac{c}{R} \quad (\text{IV.37})$$

como a semi-profundidade adimensional do enrijecedor, a aplicação destes mesmos parâmetros adimensionais em (IV.28) fornece o funcional de energia potencial total do enrijecedor em sua forma normalizada:

$$\begin{aligned} V_s = \frac{R^2}{2} \int_0^{\ell} \int_{-\gamma}^{\gamma} \{ & \eta K [\varepsilon_{\zeta}^2 + \varepsilon_{\xi}^2 + 2 \nu \varepsilon_{\zeta} \varepsilon_{\xi} + 2(1-\nu) \varepsilon_{\zeta\xi}^2] + \\ & + \eta^3 D [\chi_{\zeta}^2 + \chi_{\xi}^2 + 2 \nu \varepsilon_{\zeta} \varepsilon_{\xi} + 2(1-\nu) \varepsilon_{\zeta\xi}^2] + \\ & + 2 \eta K \lambda u_{s,\xi} \} d\zeta d\xi , \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

e as relações adimensionais a seguir descritas.

Relações deformação-deslocamento:

$$\epsilon_{\zeta} = w_{s,\zeta} + \frac{1}{2} (v_{s,\zeta})^2$$

$$\epsilon_{\xi} = u_{s,\xi} + \frac{1}{2} (v_{s,\xi})^2 \quad (\text{IV.39})$$

$$\epsilon_{\zeta\xi} = \frac{1}{2} (w_{s,\xi} + u_{s,\zeta} + v_{s,\zeta} v_{s,\xi}) .$$

Mudanças de curvatura:

$$\chi_{\zeta} = - \frac{1}{R} v_{s,\zeta\zeta}$$

$$\chi_{\xi} = - \frac{1}{R} v_{s,\xi\xi} \quad (\text{IV.40})$$

$$\chi_{\zeta\xi} = - \frac{1}{R} v_{s,\zeta\xi} .$$

Relações constitutivas:

$$N_{\zeta} = \eta K (\varepsilon_{\zeta} + \nu \varepsilon_{\xi})$$

$$N_{\xi} = \eta K (\varepsilon_{\xi} + \nu \varepsilon_{\zeta}) \quad (\text{IV.41a})$$

$$N_{\zeta\xi} = \eta K (1 - \nu) \varepsilon_{\zeta\xi}$$

e

$$M_{\zeta} = \eta^3 D (\chi_{\zeta} + \nu \chi_{\xi})$$

$$M_{\xi} = \eta^3 D (\chi_{\xi} + \nu \chi_{\zeta}) \quad (\text{IV.41b})$$

$$M_{\zeta\xi} = \eta^3 D (1 - \nu) \chi_{\zeta\xi} .$$

IV.3. EXPRESSÃO DOS FUNCIONAIS DE ENERGIA NA FORMA INCREMENTAL

IV.3.1. ENERGIA POTENCIAL TOTAL NA FORMA INCREMENTAL PARA O PAINEL CILÍNDRICO

O campo de deslocamentos do painel cilíndrico

$$\underline{u}_p \equiv (u_p; v_p; w_p) , \quad (\text{IV.42})$$

para um determinado parâmetro de carga λ , pode ser tomado como

$$\underline{u}_p = \underline{u}_p^F + \underline{u}_p^I \quad (\text{IV.43})$$

onde

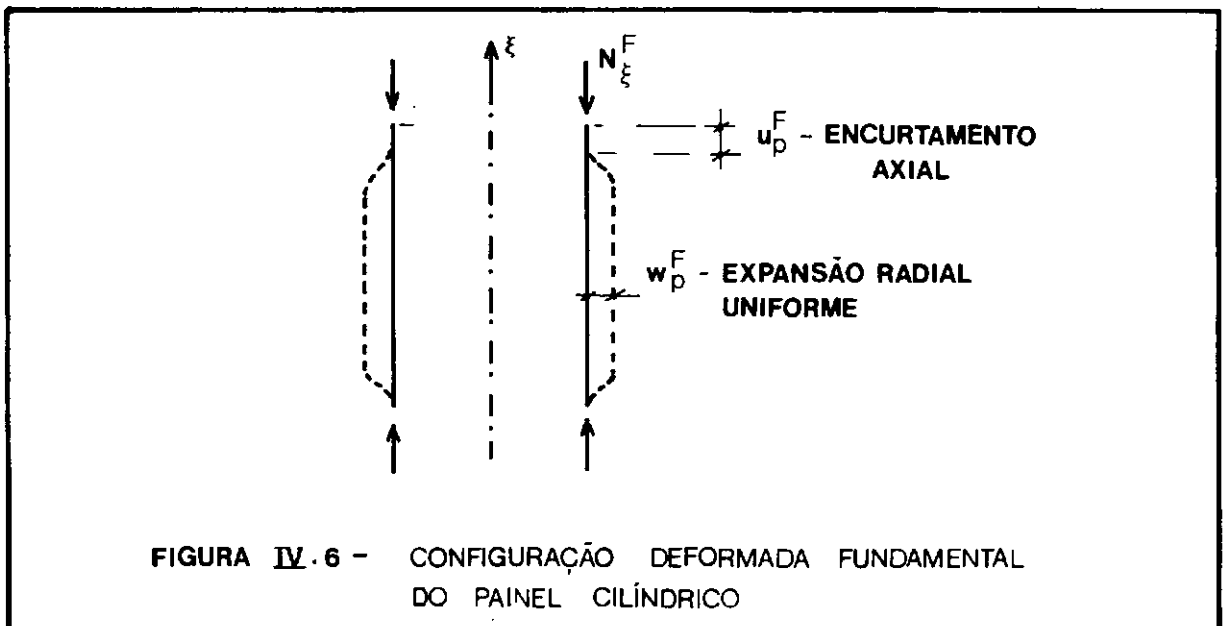
$$\underline{u}_p^F \equiv (u_p^F; v_p^F; w_p^F) \quad (\text{IV.44})$$

representa o campo de deslocamentos do estado fundamental de equilíbrio admitido como um estado de deformação de membrana [6], conforme ilustrado na figura (IV.6), e

$$\underline{u}_p^I \equiv (u_p^I; v_p^I; w_p^I) \quad (\text{IV.45})$$

uma variação $\delta \underline{u}^F$, ou seja, um campo arbitrário incremental, cinematicamente admissível, o qual somado a \underline{u}^F dá origem a configuração deformada \underline{u}_p vizinha a configuração original \underline{u}^F .

Esta perturbação imposta ao comportamento fundamental do painel cilíndrico vem representar os modos críticos e secundários introduzidos como parte da solução do problema para permitir a análise da estabilidade elástica.



Pela substituição de

$$u_p = u_p^F + u_p^I$$

$$v_p = v_p^F + v_p^I \quad (\text{IV.46})$$

$$w_p = w_p^F + w_p^I$$

nas equações (IV.34) e (IV.35), as deformações específicas e mudanças de curvatura ficam:

$$\epsilon_\xi = \left[u_{p,\xi}^F + \frac{1}{2} (w_{p,\xi}^F)^2 \right] + \left[u_{p,\xi}^I + \frac{1}{2} (w_{p,\xi}^I)^2 + w_{p,\xi}^F w_{p,\xi}^I \right]$$

$$\epsilon_\theta = \left[v_{p,\theta}^F + w_p^F + \frac{1}{2} (w_{p,\theta}^F)^2 \right] + \left[v_{p,\theta}^I + w_p^I + \frac{1}{2} (w_{p,\theta}^I)^2 + w_{p,\theta}^F w_{p,\theta}^I \right]$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi\theta} = & \frac{1}{2} \{ [u_{p,\theta}^F + v_{p,\xi}^F + w_{p,\xi}^F w_{p,\theta}^F] + \\ & + [u_{p,\theta}^I + v_{p,\xi}^I + w_{p,\xi}^I w_{p,\theta}^I + w_{p,\xi}^F w_{p,\theta}^I + w_{p,\theta}^F w_{p,\xi}^I] \} \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

e

$$\chi_\xi = - \frac{1}{R} (w_{p,\xi\xi}^F + w_{p,\xi\xi}^I)$$

$$\chi_\theta = - \frac{1}{R} (w_{p,\theta\theta}^F + w_{p,\theta\theta}^I) \quad (\text{IV.48})$$

$$\chi_{\xi\theta} = - \frac{1}{R} (w_{p,\xi\theta}^F + w_{p,\xi\theta}^I) .$$

Nota-se, pelas equações (IV.47), que estes parâmetros na

sua forma incremental, por terem sido gerados através de uma transformação linear, representam a soma das deformações específicas fundamentais com as deformações específicas incrementais, da forma:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\xi} &= \epsilon_{\xi}^F + \epsilon_{\xi}^I \\ \epsilon_{\theta} &= \epsilon_{\theta}^F + \epsilon_{\theta}^I \\ \epsilon_{\xi\theta} &= \epsilon_{\xi\theta}^F + \epsilon_{\xi\theta}^I,\end{aligned}\tag{IV.49}$$

e, ainda, que as deformações incrementais podem ser subdivididas em termos lineares e quadráticos, fornecendo

$$\begin{aligned}\epsilon_{\xi} &= \epsilon_{\xi}^F + \epsilon_{\xi}' + \epsilon_{\xi}'' \\ \epsilon_{\theta} &= \epsilon_{\theta}^F + \epsilon_{\theta}' + \epsilon_{\theta}'' \\ \epsilon_{\xi\theta} &= \epsilon_{\xi\theta}^F + \epsilon_{\xi\theta}' + \epsilon_{\xi\theta}''\end{aligned}\tag{IV.50}$$

onde o super-índice I foi abandonado por comodidade e onde foram introduzidos ('), para os termos incrementais lineares e ("), para os termos incrementais quadráticos.

Com esta notação, os termos aparecendo em (IV.49) e (IV.50) passam a ser de forma explícita:

$$\epsilon_{\xi}^F = u_{p,\xi}^F + \frac{1}{2} (w_{p,\xi}^F)^2$$

$$\epsilon_{\theta}^F = v_{p,\theta}^F + w_p^F + \frac{1}{2} (w_{p,\theta}^F)^2$$

$$\epsilon_{\xi\theta}^F = \frac{1}{2} [u_{p,\theta}^F + v_{p,\xi}^F + w_{p,\xi}^F w_{p,\theta}^F] \quad (\text{IV.51})$$

$$\epsilon_{\xi}' = u_{p,\xi} + w_{p,\xi}^F w_{p,\xi} \quad \epsilon_{\xi}'' = \frac{1}{2} (w_{p,\xi})^2$$

$$\epsilon_{\theta}' = v_{p,\theta} + w_p + w_{p,\theta}^F w_{p,\theta} \quad \epsilon_{\theta}'' = \frac{1}{2} (w_{p,\theta})^2$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi\theta}' &= \frac{1}{2} [u_{p,\theta} + v_{p,\xi} + w_{p,\xi}^F w_{p,\theta} + \\ &\quad + w_{p,\theta}^F w_{p,\xi}] \quad \epsilon_{\xi\theta}'' = \frac{1}{2} (w_{p,\xi} w_{p,\theta}) \end{aligned}$$

As mudanças de curvatura são consideradas lineares:

$$x_{\xi} = x_{\xi}^F + x_{\xi}'$$

$$x_{\theta} = x_{\theta}^F + x_{\theta}' \quad (\text{IV.52})$$

$$x_{\xi\theta} = x_{\xi\theta}^F + x_{\xi\theta}' ,$$

sendo

$$\chi_{\xi}^F = - \frac{1}{R} w_{p,\xi\xi}^F$$

$$\chi_{\xi}' = - \frac{1}{R} w_{p,\xi\xi}$$

$$\chi_{\theta}^F = - \frac{1}{R} w_{p,\theta\theta}^F$$

$$\chi_{\theta}' = - \frac{1}{R} w_{p,\theta\theta} \quad (\text{IV.53})$$

$$\chi_{\xi\theta}^F = - \frac{1}{R} w_{p,\xi\theta}^F$$

$$\chi_{\xi\theta}' = - \frac{1}{R} w_{p,\xi\theta} .$$

E, portanto, as resultantes de esforços internos de membrana e momentos internos são dados pelas somas:

$$N_{\xi} = N_{\xi}^F + N_{\xi}' + N_{\xi}''$$

$$N_{\theta} = N_{\theta}^F + N_{\theta}' + N_{\theta}'' \quad (\text{IV.54})$$

$$N_{\xi\theta} = N_{\xi\theta}^F + N_{\xi\theta}' + N_{\xi\theta}''$$

e

$$M_{\xi} = M_{\xi}^F + M_{\xi}'$$

$$M_{\theta} = M_{\theta}^F + M_{\theta}' \quad (\text{IV.55})$$

$$M_{\xi\theta} = M_{\xi\theta}^F + M_{\xi\theta}' .$$

Considerando o estado fundamental de membrana [6], vem:

$$u_p^F = - \frac{\sigma}{E} \xi \quad (\text{IV.56a})$$

$$w_p^F = -\nu u_{p,\xi}^F \quad \therefore \quad w_p^F = \nu \frac{\sigma}{E} \quad (\text{IV.56b})$$

$$u_{p,\theta}^F = 0 \quad (\text{IV.56c})$$

$$v_p^F = 0 \quad (\text{IV.56d})$$

$$w_{p,\xi}^F = w_{p,\theta}^F = w_{p,\xi\xi}^F = w_{p,\theta\theta}^F = w_{p,\xi\theta}^F = 0 \quad (\text{IV.56d})$$

e, desta forma, as deformações específicas e mudanças de curvatura passam a ser

$$\begin{aligned} \epsilon_\xi &= u_{p,\xi}^F + u_{p,\xi} + \frac{1}{2} (w_{p,\xi})^2 \\ \epsilon_\theta &= w_p^F + v_{p,\theta} + w_p + \frac{1}{2} (w_{p,\theta})^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

$$\epsilon_{\xi\theta} = \frac{1}{2} (u_{p,\theta} + v_{p,\xi} + w_{p,\xi} w_{p,\theta})$$

$$\chi_\xi = -\frac{1}{R} w_{p,\xi\xi}$$

$$\chi_\theta = -\frac{1}{R} w_{p,\theta\theta} \quad (\text{IV.58})$$

$$\chi_{\xi\theta} = -\frac{1}{R} w_{p,\xi\theta}$$

Introduzindo as expressões (IV.57) e (IV.58) na equação

(IV.33), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 V_p = & \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \left[u_{p,\xi}^F + u_{p,\xi} + \frac{1}{2} (w_{p,\xi})^2 \right]^2 + \right. \\
 & + \left[w_p^F + v_{p,\theta} + w_p + \frac{1}{2} (w_{p,\theta})^2 \right]^2 + 2\nu \left[u_{p,\xi}^F + u_{p,\xi} + \frac{1}{2} (w_{p,\xi})^2 \right] \cdot \\
 & \cdot \left[w_p^F + v_{p,\theta} + w_p + \frac{1}{2} (w_{p,\theta})^2 \right] + 2(1-\nu) \left[\frac{1}{2} (u_{p,\theta} + v_{p,\xi} + w_{p,\xi} w_{p,\theta}) \right]^2 + \\
 & + \alpha \left[(w_{p,\xi\xi})^2 + (w_{p,\theta\theta})^2 + 2\nu (w_{p,\xi\xi}) (w_{p,\theta\theta}) + 2(1-\nu) (w_{p,\xi\theta})^2 \right] + \\
 & \left. + 2\lambda \left[u_{p,\xi}^F + u_{p,\xi} \right] \right\} d\theta d\xi
 \end{aligned} \tag{IV.59}$$

onde

$$\alpha = \frac{h_p^2}{12 R^2} . \tag{IV.60}$$

Efetuada os cálculos e agrupando convenientemente as parcelas resultantes, lembrando a omissão do super-índice I, verifica-se que

$$\begin{aligned}
 V_p(\underline{u}^F + \underline{u}, \lambda) \equiv & V_p^F(\underline{u}^F; \lambda) + V_{p1}(\underline{u}; \underline{u}^F; \lambda) + V_{p2}(\underline{u}; \underline{u}^F(\lambda)) + \\
 & + V_{p3}(\underline{u}) + V_{p4}(\underline{u}) ,
 \end{aligned} \tag{IV.61}$$

onde V_p^F é a energia potencial total do estado fundamental e V_{p1} , V_{p2} , V_{p3} e V_{p4} são a primeira, segunda, terceira e quarta variações de V_p que contêm, respectivamente, os termos lineares, quadráticos, cúbicos e quárticos dos deslocamentos incrementais e

suas derivadas, podendo conter $u^F(\lambda)$ como parâmetro, conforme a seguir se apresenta.

$$v_p^F = \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [w_p^F (w_p^F + v u_{p,\xi}^F) + u_{p,\xi}^F (u_{p,\xi}^F + v w_p^F + 2\lambda)] d\theta d\xi \quad (IV.62)$$

$$v_{p1} = \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [2 u_{p,\xi} (u_{p,\xi}^F + v w_p^F + \lambda) + 2 (w_p + v_{p,\theta}) \cdot (w_p^F + v u_{p,\xi}^F)] d\theta d\xi \quad (IV.63)$$

$$\begin{aligned} v_{p2} = & \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{ (w_{p,\xi})^2 (u_{p,\xi}^F + v w_p^F) + (w_{p,\theta})^2 (w_p^F + v u_{p,\xi}^F) + \\ & + (u_{p,\xi})^2 (v_{p,\theta} + w_p) + (v_{p,\theta} + w_p + 2 v u_{p,\xi}) + \\ & + \frac{1}{2} (1 - v) [(u_{p,\theta})^2 + (v_{p,\xi})^2 + 2 u_{p,\theta} v_{p,\xi}] + \\ & + \alpha [(w_{p,\xi\xi})^2 + (w_{p,\theta\theta})^2 + 2 v w_{p,\xi\xi} w_{p,\theta\theta} + 2(1-v) (w_{p,\xi\theta})^2] \} d\theta d\xi \end{aligned} \quad (IV.64)$$

$$\begin{aligned} v_{p3} = & \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{ u_{p,\xi} (w_{p,\xi})^2 + (v_{p,\theta} + w_p) (w_{p,\theta})^2 + \\ & + v [u_{p,\xi} (w_{p,\theta})^2 + (v_{p,\theta} + w_p) (w_{p,\xi})^2] + \\ & + (1-v) w_{p,\xi} w_{p,\theta} (u_{p,\theta} + v_{p,\xi}) \} d\theta d\xi \end{aligned} \quad (IV.65)$$

$$v_{p4} = \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{4} [(w_{p,\xi})^2 + (w_{p,\theta})^2]^2 d\theta d\xi \quad (IV.66)$$

Sendo o estado fundamental conhecido, de (IV.56a) e (IV.56b), usando (IV.20), obtêm-se as igualdades

$$w_p^F + v u_{p,\xi}^F = 0 \quad (\text{IV.67})$$

e

$$u_{p,\xi}^F + v w_p^F = -\lambda, \quad (\text{IV.68})$$

que conduzidos a (IV.62), (IV.63) e (IV.64) permitem verificar:

- (i) Ser constante a energia referente ao estado fundamental de equilíbrio:

$$V_p^F = -R^2 K \ell \theta_0 (1 - v^2) \frac{\sigma^2}{E^2}. \quad (\text{IV.69})$$

- (ii) Ser identicamente nula a primeira variação do incremento de energia:

$$V_{p1} \equiv 0 \quad (\text{IV.70})$$

- (iii) O surgimento do parâmetro de carga λ na segunda variação de V_p ,

$$\begin{aligned}
V_{p2} = & \frac{KR^2}{2} \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{ -\lambda (w_{p,\xi})^2 + (u_{p,\xi})^2 + (v_{p,\theta} + w_p) \cdot \\
& \cdot (v_{p,\theta} + w_p + 2 \nu u_{p,\xi}) + \frac{1}{2} (1-\nu) [(u_{p,\theta}) + (v_{p,\xi})]^2 + \\
& + \alpha [(w_{p,\xi\xi})^2 + (w_{p,\theta\theta})^2 + 2 \nu w_{p,\xi\xi} w_{p,\theta\theta} + \\
& + 2(1-\nu) (w_{p,\xi\theta})^2] \} d\theta d\xi ,
\end{aligned}
\tag{IV.71}$$

através dos termos representativos das rotações $u_{p,\xi}^F$ e deslocamentos w_p^F acoplados com funções incrementais. Observa-se que a segunda variação é a única a apresentar os efeitos de flexão, restando, as variações de ordem mais alta, efeitos puramente extensionais.

(iv) V_{p3} e V_{p4} permanecem inalteradas.

IV.3.2. ENERGIA POTENCIAL NA FORMA INCREMENTAL PARA O ENRIJECEDOR

Dentro de uma mesma formulação incremental, como a realizada no ítem anterior, a interpretação do campo de deslocamentos \underline{u}_s na forma

$$\underline{u}_s = \underline{u}_s^F + \underline{u}_s^I ,
\tag{IV.72}$$

tal que

$$u_s = u_s^F + u_s^I$$

$$v_s = v_s^F + v_s^I \quad (\text{IV.73})$$

$$w_s = w_s^F + w_s^I ,$$

conduz à representação das componentes de deformação específica e mudanças de curvatura, omitindo-se o super-índice (I), por:

$$\epsilon_\zeta = w_{s,\zeta}^F + w_{s,\zeta} + \frac{1}{2} (v_{s,\zeta}^F)^2 + \frac{1}{2} (v_{s,\zeta})^2 + v_{s,\zeta}^F v_{s,\zeta}$$

$$\epsilon_\xi = u_{s,\xi}^F + u_{s,\xi} + \frac{1}{2} (v_{s,\xi}^F)^2 + \frac{1}{2} (v_{s,\xi})^2 + v_{s,\xi}^F v_{s,\xi}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\zeta\xi} = & \frac{1}{2} [u_{s,\zeta}^F + u_{s,\zeta} + w_{s,\xi}^F + w_{s,\xi} + v_{s,\xi}^F v_{s,\zeta}^F + v_{s,\xi}^F v_{s,\zeta} + \\ & + v_{s,\xi} v_{s,\zeta}^F + v_{s,\zeta} v_{s,\xi}] \end{aligned} \quad (\text{IV.74})$$

e

$$\chi_\zeta = - \frac{1}{R} (v_{s,\zeta\zeta}^F + v_{s,\zeta\zeta})$$

$$\chi_\xi = - \frac{1}{R} (v_{s,\xi\xi}^F + v_{s,\xi\xi}) \quad (\text{IV.75})$$

$$\chi_{\zeta\xi} = - \frac{1}{2} (v_{s,\zeta\xi}^F + v_{s,\zeta\xi}) .$$

Assumindo o estado fundamental de equilíbrio do enrijeceo

dor também como um estado de membrana, verificam-se as equações:

$$u_s^F = - \frac{\sigma}{E} \xi \quad (\text{IV.76a})$$

$$v_s^F = 0 \quad (\text{IV.76b})$$

$$w_s^F = \nu \frac{\sigma}{E} (1 + \zeta - \xi) \quad (\text{IV.76c})$$

$$u_{s,\zeta}^F = 0 \quad (\text{IV.76d})$$

$$v_{s,\xi}^F = v_{s,\zeta}^F = v_{s,\xi\xi}^F = v_{s,\zeta\zeta}^F = v_{s,\xi\zeta}^F = 0 . \quad (\text{IV.76e})$$

Introduzindo-se essas simplificações em (IV.74) e (IV.75),

vem

$$\epsilon_{\zeta} = w_{s,\zeta}^F + w_{s,\zeta} + \frac{1}{2} (v_{s,\zeta})^2$$

$$\epsilon_{\xi} = u_{s,\xi}^F + u_{s,\xi} + \frac{1}{2} (v_{s,\xi})^2 \quad (\text{IV.77})$$

$$\epsilon_{\zeta\xi} = \frac{1}{2} (u_{s,\zeta} + w_{s,\xi} + v_{s,\zeta} v_{s,\xi})$$

e

$$\chi_{\zeta} = - \frac{1}{R} v_{s,\zeta\zeta}$$

$$\chi_{\xi} = - \frac{1}{R} v_{s,\xi\xi} \quad (\text{IV.78})$$

$$\chi_{\zeta\xi} = - \frac{1}{R} v_{s,\xi\zeta} .$$

Substituindo (IV.77) e (IV.78) no funcional de energia potencial total do enrijecedor (IV.38), obtêm-se

$$\begin{aligned} \nu_s = & \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^{\ell} \int_{-\gamma}^{\gamma} \{ [w_{s,\zeta}^F + w_{s,\zeta} + \frac{1}{2} (v_{s,\zeta})^2]^2 + [u_{s,\xi}^F + u_{s,\xi} + \\ & + \frac{1}{2} (v_{s,\xi})^2]^2 + 2\nu [w_{s,\zeta}^F + w_{s,\zeta} + \frac{1}{2} (v_{s,\zeta})^2] \cdot \\ & \cdot [u_{s,\xi}^F + u_{s,\xi} + \frac{1}{2} (v_{s,\xi})^2] + 2(1-\nu) [\frac{1}{2} (u_{s,\zeta} + w_{s,\xi} + v_{s,\zeta} v_{s,\xi})]^2 + \\ & + \eta^2 \alpha [(v_{s,\zeta\zeta})^2 + (v_{s,\xi\xi})^2 + 2\nu (v_{s,\zeta\zeta}) (v_{s,\xi\xi}) + 2(1-\nu) (v_{s,\zeta\xi})^2] + \\ & + 2\lambda u_{s,\xi} \} d\zeta d\xi . \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

Ordenando, convenientemente, os termos de mesmo grau em parcelas, a energia ν_s é escrita da forma incremental

$$\nu_s \equiv \nu_s^F + \nu_{s1} + \nu_{s2} + \nu_{s3} + \nu_{s4} , \quad (\text{IV.80})$$

onde cada uma dessas parcelas são dadas explicitamente pelas ex

pressões a seguir apresentadas.

$$V_s^F = \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\gamma}^\gamma [w_{s,\zeta}^F (w_{s,\zeta}^F + \nu u_{s,\xi}^F) + u_{s,\xi}^F (u_{s,\xi}^F + \nu w_{s,\zeta}^F) + 2 \lambda u_{s,\xi}^F] d\zeta d\xi \quad (IV.81)$$

$$V_{s1} = \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\gamma}^\gamma [2 w_{s,\zeta} (w_{s,\zeta}^F + \nu u_{s,\xi}^F) + 2 u_{s,\xi} (u_{s,\xi}^F + \nu w_{s,\zeta}^F) + 2 \lambda u_{s,\xi}] d\zeta d\xi \quad (IV.82)$$

$$V_{s2} = \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\gamma}^\gamma \{ (v_{s,\zeta})^2 (w_{s,\zeta}^F + \nu u_{s,\xi}^F) + (v_{s,\xi})^2 (u_{s,\xi}^F + \nu w_{s,\zeta}^F) + (w_{s,\zeta})^2 + (u_{s,\xi})^2 + 2 \nu u_{s,\xi} w_{s,\zeta} + \frac{1-\nu}{2} [(u_{s,\zeta})^2 + (w_{s,\xi})^2 + 2 u_{s,\zeta} w_{s,\xi}] + \eta^2 \alpha [(v_{s,\zeta\zeta})^2 + (v_{s,\xi\xi})^2 + 2 \nu (v_{s,\zeta\zeta}) (v_{s,\xi\xi}) + 2(1-\nu) (v_{s,\zeta\xi})^2] \} d\zeta d\xi \quad (IV.83)$$

$$V_{s3} = \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\gamma}^\gamma \{ w_{s,\zeta} (v_{s,\zeta})^2 + u_{s,\xi} (v_{s,\xi})^2 + \nu [u_{s,\xi} (v_{s,\zeta})^2 + w_{s,\zeta} (v_{s,\xi})^2] + (1-\nu) v_{s,\zeta} v_{s,\xi} (u_{s,\zeta} + w_{s,\xi}) \} d\zeta d\xi \quad (IV.84)$$

$$V_{s4} = \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\gamma}^\gamma \frac{1}{4} [(v_{s,\zeta})^2 + (v_{s,\xi})^2]^2 d\zeta d\xi \quad (IV.85)$$

Com o estado fundamental conhecido (equações (IV.76a) e

(IV.76c)) e usando (IV.20), tendo-se

$$w_{s,\zeta}^F + v u_{s,\xi}^F = 0 \quad (\text{IV.86})$$

e

$$u_{s,\xi}^F + v w_{s,\zeta}^F = -\lambda, \quad (\text{IV.87})$$

verifica-se:

$$(i) \quad v_s^F = \text{constante} \quad (\text{IV.88})$$

$$(ii) \quad v_{s1} \equiv 0 \quad (\text{IV.89})$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad v_{s2} &= \eta \left[-\frac{KR^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\gamma}^\gamma \{ -\lambda (v_{s,\xi})^2 + (w_{s,\zeta})^2 + (u_{s,\xi})^2 + \right. \\ &\quad + 2v u_{s,\xi} w_{s,\zeta} + \frac{1-v}{2} (u_{s,\zeta} + w_{s,\xi})^2 + \\ &\quad + \eta^2 \alpha [(v_{s,\zeta\zeta})^2 + (v_{s,\xi\xi})^2 + 2v v_{s,\zeta\zeta} v_{s,\xi\xi} + \\ &\quad \left. + 2(1-v) (v_{s,\zeta\xi})^2] \} d\zeta d\xi \right] \quad (\text{IV.90}) \end{aligned}$$

$$(iv) \quad v_{s3} \text{ e } v_{s4} \text{ permanecem inalteradas.}$$

CAPÍTULO V

FUNCIONAIS DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL E
EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIOV.1. CRITÉRIOS DE ENERGIA PARA ESTABILIDADE E PRINCÍPIO DE
ESTACIONARIEDADE

A energia potencial total do sistema painel-enrijecedor apresentado em (IV.26),

$$V = V_p + V_s ,$$

pode ser escrita na forma adiante, através da utilização das notações de (IV.61) e (IV.80),

$$\begin{aligned} V(\underline{u}^F + \underline{u}^I ; \lambda) = & V^F [\underline{u}^F ; \lambda] + \nu_1 [\underline{u}^I ; \underline{u}^F(\lambda) ; \lambda] + \\ & + \nu_2 [\underline{u}^I ; \underline{u}^F(\lambda)] + \nu_3 [\underline{u}^I] + \nu_4 [\underline{u}^I] \end{aligned} \quad (V.1)$$

onde, agora,

$$\underline{u}^F = \underline{u}_p^F + \underline{u}_s^F, \quad (V.2)$$

$$\underline{u}^I = \underline{u}_p^I + \underline{u}_s^I \quad (V.3)$$

e

$$\underline{u} = \underline{u}^F + \underline{u}^I, \quad (V.4)$$

sendo \underline{u} um campo de deslocamentos sob ação de cargas "quase-estáticas" conservativas, associadas a um único parâmetro fundamental de carregamento, λ .

De acordo com o critério de energia de Lagrange, para essa configuração de equilíbrio ser estável, a energia potencial total, consistindo da soma das energias interna e externa, tem que ser um mínimo relativo e completo, com respeito às energias potenciais totais associadas a todos os estados vizinhos cinematicamente admissíveis. Portanto, para a estabilidade deve-se ter

$$V(\underline{u}) > V(\underline{u}^F). \quad (V.5)$$

Para o equilíbrio estático, de uma estrutura sob carregamento λ fixado, é necessário e suficiente que a energia potencial total de sistema, $V(\underline{u}; \lambda)$, seja estacionária com respeito ao campo de deslocamentos \underline{u} , que caracteriza uma configuração de equilíbrio. Assim, se esta configuração é cinematicamente admissível, pelo princípio de estacionariedade de energia, tem-se que o estado é de equilíbrio estático se

$$\delta V(\underline{u}; \lambda) = 0 \quad (V.6)$$

para todas as variações admissíveis $\delta \underline{u}$ do campo de deslocamentos.

Como a configuração original é um estado de equilíbrio, $v_1[\underline{u}^I; \underline{u}^F(\lambda); \lambda]$ é identicamente nula. Com isto, sendo \underline{u}^F constante, a equação (V.6) pode ser aplicada diretamente sobre a variação de energia na forma:

$$\begin{aligned} \Delta V &= v(\underline{u}^I; \lambda) \equiv v[\underline{u}^F + \underline{u}^I; \lambda] - v^F[\underline{u}^F; \lambda] \equiv \\ &\equiv v_2 + v_3 + v_4 . \end{aligned} \quad (V.7)$$

A discretização deste funcional é realizada assumindo-se para o campo de deslocamentos \underline{u}^I as formas apresentadas neste trabalho pelas equações (III.17) e (III.18). O resultado disto é o funcional aproximado

$$\Delta V^*(\underline{u}; \lambda) = \Delta V_p^* + \Delta V_s^* . \quad (V.8)$$

Nota-se que esta discretização é, na realidade, uma aplicação do método direto de RAYLEIGH-RITZ, quando se introduz em (V.7) um sub-conjunto (III.4) de funções **pertencentes** à solução da equação diferencial do problema dado pelas funções (III.2).

Convém observar que, individualmente, além dos modos críticos clássicos, nem todos os demais modos constantes dos campos de deslocamentos descrito em (III.4) atendem necessariamente às condições de bordo de casca bi-apoiada. Entretanto, estes modos são continuamente diferenciáveis até a ordem necessária para a definição ao funcional (V.7) em seu domínio de vali-

dade; eles constituem uma seqüência de funções completa e aproximam, no somatório, às condições de contorno exigidas. O atendimento dessas condições de contorno é realizado pela imposição de (II.7).

V.2. DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL DO PAINEL CILÍNDRICO

A discretização do funcional de energia potencial total do painel cilíndrico se dá pela substituição do campo de deslocamentos (III.16) na expressão da variação de energia

$$\Delta V_p = V_p - V_p^F = V_{p2} + V_{p3} + V_{p4} , \quad (V.9)$$

conforme equações (IV.71), (IV.65) e (IV.66), respectivamente.

Desta forma, a variação de energia potencial total do painel cilíndrico é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta V_p = & \frac{R^2 K}{2} \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{ -\lambda (w_{p,\xi})^2 + (u_{p,\xi})^2 + \\
& + (v_{p,\theta} + w_p) (v_{p,\theta} + w_p + 2\nu u_{p,\xi}) + \frac{1-\nu}{2} (u_{p,\theta} + v_{p,\xi})^2 + \\
& + \alpha [(w_{p,\xi\xi})^2 + (w_{p,\theta\theta})^2 + 2\nu w_{p,\xi\xi} w_{p,\theta\theta} + 2(1-\nu) (w_{p,\xi\theta})^2] + \\
& + u_{p,\xi} (w_{p,\xi})^2 + (v_{p,\theta} + w_p) (w_{p,\theta})^2 + \\
& + \nu [u_{p,\xi} (w_{p,\theta})^2 + (v_{p,\theta} + w_p) (w_{p,\xi})^2] + \\
& + (1-\nu) w_{p,\xi} w_{p,\theta} (u_{p,\theta} + v_{p,\xi}) + \\
& + \frac{1}{4} [(w_{p,\xi})^2 + (w_{p,\theta})^2]^2 \} d\theta d\xi .
\end{aligned}
\tag{V.10}$$

Introduzindo em (V.10) os modos incrementais aproximados (III.16),

$$u_p = u_2 \cos q\xi \cos p\theta + u_3 (\sin 2q\xi - 2q\xi)$$

$$v_p = v_2 \sin q\xi \sin p\theta + v_5 (\cos 2q\xi - 1) \sin 2p\theta$$

$$\begin{aligned}
w_p = & w_2 \sin q\xi \cos p\theta + w_3 \cos 2q\xi + w_5 \cos 2q\xi \cos 2p\theta + \\
& + w_6 \cos 2q\xi \cos 4p\theta + w_7 (\cos 4q\xi + 3) \cos 2p\theta ,
\end{aligned}$$

e suas derivadas, obtêm-se a variação de energia do funcional aproximado

$$\Delta v_p^* = \frac{R^2 K}{2} \{ -\lambda f_1^p + f_2^p + f_3^p + 2f_4^p + f_5^p + 2v(f_6^p + f_7^p) +$$

$$+ \frac{1-v}{2} (f_8^p + f_9^p + 2f_{10}^p) +$$

$$+ \alpha [f_{11}^p + f_{12}^p + 2vf_{13}^p + 2(1-v) f_{14}^p] +$$

$$+ f_{15}^p + f_{16}^p + f_{17}^p + v(f_{18}^p + f_{19}^p + f_{20}^p) +$$

$$+ (1-v) (f_{21}^p + f_{22}^p) + \frac{1}{4} (f_{23}^p + f_{24}^p + 2f_{25}^p) \} \quad ,$$

(V.11)

onde as funções f_i^p são definidas a seguir.

Funções f_i^p

$$f_1^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_2^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (u_{p,\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_3^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (v_{p,\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_4^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} v_{p,\theta} w_p d\theta d\xi$$

$$f_5^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_p)^2 d\theta d\xi$$

$$f_6^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} v_{p,\theta} u_{p,\xi} d\theta d\xi$$

$$f_7^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} w_p u_{p,\xi} d\theta d\xi$$

$$f_8^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (u_{p,\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_9^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (v_{p,\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{10}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} u_{p,\theta} v_{p,\xi} d\theta d\xi$$

$$f_{11}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\xi\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{12}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\theta\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{13}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} w_{p,\xi\xi} w_{p,\theta\theta} d\theta d\xi$$

$$f_{14}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\xi\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{15}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} u_{p,\xi} (w_{p,\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{16}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} v_{p,\theta} (w_{p,\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{17}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} w_p (w_{p,\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{18}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} u_{p,\xi} (w_{p,\theta})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{19}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} v_{p,\theta} (w_{p,\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{20}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} w_p (w_{p,\xi})^2 d\theta d\xi$$

$$f_{21}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} w_{p,\xi} w_{p,\theta} u_{p,\theta} d\theta d\xi$$

$$f_{22}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} w_{p,\xi} w_{p,\theta} v_{p,\xi} d\theta d\xi$$

$$f_{23}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\xi})^4 d\theta d\xi$$

$$f_{24}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\theta})^4 d\theta d\xi$$

$$f_{25}^p = \int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (w_{p,\xi})^2 (w_{p,\theta})^2 d\theta d\xi$$

Estas funções, devidamente integradas, são as abaixo descritas.

$$f_1^p = \ell \theta_0 q^2 \left(\frac{1}{2} w_2^2 + 4w_3^2 + 2w_5^2 + 2w_6^2 + 8w_7^2 \right) +$$

$$+ \frac{q}{p} \left(-\frac{32}{3} w_2 w_3 - \frac{32}{9} w_2 w_5 + \frac{32}{45} w_2 w_6 - \frac{128}{45} w_2 w_7 \right) \quad (V.13a)$$

$$f_2^p = \frac{1}{2} \ell \theta_0 q^2 u_2^2 \quad (V.13b)$$

$$f_3^p = \ell \theta_0 p^2 \left(\frac{1}{2} v_2^2 + 6v_5^2 \right) - \frac{64}{9} \frac{p}{q} v_2 v_5 \quad (V.13c)$$

$$f_4^p = \frac{1}{2} \ell \theta_0 p (v_2 w_2 + 2v_5 w_5 - 12v_5 w_7) +$$

$$+ \frac{1}{q} \left(-\frac{4}{3} v_2 w_3 - \frac{4}{9} v_2 w_5 + \frac{4}{45} v_2 w_6 + \frac{176}{45} v_2 w_7 - \frac{32}{9} v_5 w_2 \right) \quad (V.13d)$$

$$f_5^p = \ell \theta_0 \left(\frac{1}{2} w_2^2 + w_3^2 + \frac{1}{2} w_5^2 + \frac{1}{2} w_6^2 + \frac{19}{2} w_7^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{pq} \left(-\frac{8}{3} w_2 w_3 - \frac{8}{9} w_2 w_5 + \frac{8}{45} w_2 w_6 + \frac{352}{45} w_2 w_7 \right) \quad (V.13e)$$

$$f_6^p = -\frac{1}{2} \ell \theta_0 pq u_2 v_2 + \frac{32}{9} u_2 v_5 - \frac{32}{3} u_3 v_2 \quad (V.13f)$$

$$f_7^p = \ell \theta_0 q \left(-\frac{1}{2} u_2 w_2 + 2 u_3 w_3 \right) + \frac{1}{p} \left(-\frac{4}{3} u_2 w_3 + \frac{4}{9} u_2 w_5 - \right. \\ \left. - \frac{4}{45} u_2 w_6 - \frac{176}{45} u_2 w_7 - \frac{32}{3} u_3 w_2 \right) \quad (V.13g)$$

$$f_8^p = \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 u_2^2 \quad (V.13h)$$

$$f_9^p = \ell \theta_0 q^2 \left(\frac{1}{2} v_2^2 + 2v_5^2 \right) - \frac{64}{9} \frac{q}{p} v_2 v_5 \quad (V.13i)$$

$$f_{10}^p = -\frac{1}{2} \ell \theta_0 pq u_2 v_2 + \frac{8}{9} u_2 v_5 \quad (V.13j)$$

$$f_{11}^p = \ell \theta_0 q^4 \left(\frac{1}{2} w_2^2 + 16w_3^2 + 8w_5^2 + 8w_6^2 + 128w_7^2 \right) + \\ + \frac{q^3}{p} \left(-\frac{32}{3} w_2 w_3 - \frac{32}{9} w_2 w_5 + \frac{32}{45} w_2 w_6 - \frac{128}{45} w_2 w_7 \right) \quad (V.13k)$$

$$f_{12}^p = \ell \theta_0 p^4 \left(\frac{1}{2} w_2^2 + 8w_5^2 + 128w_6^2 + 152w_7^2 \right) + \\ + \frac{p^3}{q} \left(-\frac{32}{9} w_2 w_5 + \frac{64}{45} w_2 w_6 + \frac{1408}{45} w_2 w_7 \right) \quad (V.13l)$$

$$f_{13}^P = \ell \theta_0 p^2 q^2 \left(\frac{1}{2} w_2^2 + 8w_5^2 + 32w_6^2 + 32w_7^2 \right) +$$

$$+ pq \left(-\frac{32}{9} w_2 w_5 + \frac{16}{9} w_2 w_6 + \frac{128}{9} w_2 w_7 \right) \quad (V.13m)$$

$$f_{14}^P = \ell \theta_0 p^2 q^2 \left(\frac{1}{2} w_2^2 + 8w_5^2 + 32w_6^2 + 32w_7^2 \right) +$$

$$+ pq \left(-\frac{128}{9} w_2 w_5 + \frac{512}{45} w_2 w_6 - \frac{512}{45} w_2 w_7 \right) \quad (V.13n)$$

$$f_{15}^P = \ell \theta_0 q^3 \left(u_2 w_2 w_3 + \frac{1}{2} u_2 w_2 w_5 - \frac{1}{2} u_3 w_2^2 + 8 u_3 w_5 w_7 - 8 u_3 w_3^2 - \right.$$

$$\left. - 4 u_3 w_5^2 - 4 u_3 w_6^2 - 16 u_3 w_7^2 \right) +$$

$$+ \frac{q^2}{p} \left(-\frac{8}{9} u_2 w_2^2 - \frac{128}{15} u_2 w_3^2 - \frac{896}{225} u_2 w_5^2 - \frac{3.968}{945} u_2 w_6^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{14.336}{945} u_2 w_7^2 - \frac{256}{45} u_2 w_3 w_5 + \frac{256}{225} u_2 w_3 w_6 + \frac{1.024}{315} u_2 w_3 w_7 - \right.$$

$$\left. - \frac{4.864}{1.575} u_2 w_5 w_6 + \frac{1.024}{225} u_2 w_5 w_7 + \frac{19.456}{11.025} u_2 w_6 w_7 + \right.$$

$$\left. + \frac{256}{15} u_3 w_2 w_3 + \frac{256}{45} u_3 w_2 w_5 - \frac{256}{225} u_3 w_2 w_6 - \frac{1.024}{315} u_3 w_2 w_7 \right) \quad (V.13o)$$

$$\begin{aligned}
 f_{16}^p = \ell \theta_0 p^3 & \left(-\frac{1}{2} v_2 w_2 w_5 + 3v_2 w_2 w_7 - 8v_5 w_5 w_6 + 24v_5 w_6 w_7 + \right. \\
 & + \frac{3}{4} v_5 w_2^2 \left. \right) + \frac{p^2}{q} \left(\frac{8}{9} v_2 w_2^2 + \frac{896}{225} v_2 w_5^2 + \frac{2.048}{135} v_2 w_6^2 + \right. \\
 & + \frac{159.232}{4.725} v_2 w_7^2 + \frac{1.024}{225} v_2 w_5 w_6 - \frac{31.744}{1.575} v_2 w_5 w_7 - \\
 & - \frac{126.976}{11.025} v_2 w_6 w_7 - \frac{768}{225} v_5 w_2 w_5 + \frac{33.792}{1.575} v_5 w_2 w_6 + \\
 & \left. + \frac{27.648}{1.575} v_5 w_2 w_7 \right)
 \end{aligned}
 \tag{V.13p}$$

$$\begin{aligned}
 f_{17}^p = \ell \theta_0 p^2 & \left(-\frac{1}{4} w_2^2 w_3 - \frac{3}{8} w_2^2 w_5 + \frac{9}{4} w_2^2 w_7 + 14w_3 w_5 w_7 + \right. \\
 & + 19w_5 w_6 w_7 \left. \right) + \frac{p}{q} \left(\frac{8}{9} w_2^3 + \frac{672}{225} w_2 w_5^2 + \frac{1.920}{135} w_2 w_6^2 + \right. \\
 & + \frac{88.864}{1.575} w_2 w_7^2 + \frac{224}{5} w_2 w_3 w_5 - \frac{896}{225} w_2 w_3 w_6 - \\
 & - \frac{3.968}{315} w_2 w_3 w_7 + \frac{1.568}{175} w_2 w_5 w_6 - \frac{7.936}{525} w_2 w_5 w_7 - \\
 & \left. - \frac{27.776}{1.225} w_2 w_6 w_7 \right)
 \end{aligned}
 \tag{V.13q}$$

$$\begin{aligned}
f_{18}^p = \ell \theta_0 p^2 q \left(\frac{1}{2} u_2 w_2 w_5 - 3u_2 w_2 w_7 - \frac{3}{2} u_3 w_2^2 + 28u_3 w_5 w_7 - \right. \\
\left. - 4u_3 w_5^2 - 16u_3 w_6^2 - 76u_3 w_7^2 \right) + \\
+ p \left(- \frac{8}{9} u_2 w_2^2 - \frac{896}{225} u_2 w_5^2 - \frac{2.048}{135} u_2 w_6^2 - \frac{366.592}{4.725} u_2 w_7^2 - \right. \\
- \frac{1.024}{225} u_2 w_5 w_6 + \frac{23.552}{4.725} u_2 w_5 w_7 + \frac{126.976}{11.025} u_2 w_6 w_7 + \\
\left. + \frac{256}{15} u_3 w_2 w_5 - \frac{3.072}{225} u_3 w_2 w_6 - \frac{3.776}{45} u_3 w_2 w_7 \right) \quad (V.13r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{19}^p = \ell \theta_0 p q^2 \left(- v_2 w_2 w_3 - \frac{1}{5} v_2 w_3 w_5 - \frac{1}{4} v_5 w_3^2 - 8v_5 w_3 w_5 - \right. \\
\left. - 2v_5 w_3 w_6 + 9v_5 w_3 w_7 + 4v_5 w_6 w_7 \right) + \\
+ q \left(\frac{8}{9} v_2 w_2^2 + \frac{128}{15} v_2 w_3^2 + \frac{896}{225} v_2 w_5^2 + \frac{3.968}{945} v_2 w_6^2 + \right. \\
+ \frac{2.048}{135} v_2 w_7^2 + \frac{256}{45} v_2 w_3 w_5 - \frac{256}{225} v_2 w_3 w_6 - \frac{1.024}{315} v_2 w_3 w_7 + \\
+ \frac{4.864}{1.575} v_2 w_5 w_6 - \frac{1.024}{225} v_2 w_5 w_7 - \frac{19.456}{11.025} v_2 w_6 w_7 - \\
- \frac{256}{45} v_5 w_2 w_3 + \frac{1.792}{225} v_5 w_2 w_5 + \frac{3.904}{1.575} v_5 w_2 w_6 - \\
\left. - \frac{1.024}{225} v_5 w_2 w_7 \right) \quad (V.13s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{20}^P = \ell \theta_0 q^2 & \left(-w_2^2 w_3 - \frac{3}{8} w_2^2 w_5 + \frac{3}{4} w_2^2 w_7 + 18w_3 w_5 w_7 + 9w_5 w_6 w_7 \right) + \\
& + \frac{q}{p} \left(\frac{8}{9} w_2^3 + \frac{32}{5} w_2 w_3^2 + \frac{224}{75} w_2 w_5^2 + \frac{992}{315} w_2 w_6^2 + \frac{512}{225} w_2 w_7^2 + \right. \\
& + \frac{64}{15} w_2 w_3 w_5 - \frac{64}{75} w_2 w_3 w_6 - \frac{5.488}{315} w_2 w_3 w_7 + \frac{1.216}{525} w_2 w_5 w_6 - \\
& \left. - \frac{38.416}{1.575} w_2 w_5 w_7 - \frac{104.272}{11.025} w_2 w_6 w_7 \right)
\end{aligned}
\tag{V.13t}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}^P = \ell \theta_0 p^2 q & \left(-\frac{1}{2} u_2 w_2 w_3 + \frac{3}{2} u_2 w_2 w_7 + \frac{1}{2} u_2 w_2 w_5 \right) + \\
& + p \left(\frac{4}{9} u_2 w_2^2 + \frac{64}{225} u_2 w_5^2 + \frac{256}{945} u_2 w_6^2 + \frac{17.408}{4.725} u_2 w_7^2 - \right. \\
& - \frac{64}{45} u_2 w_3 w_5 + \frac{256}{225} u_2 w_3 w_6 - \frac{5.888}{315} u_2 w_3 w_7 - \\
& \left. - \frac{1.984}{1.575} u_2 w_5 w_6 + \frac{8.704}{1.575} u_2 w_5 w_7 - \frac{9.472}{2.205} u_2 w_6 w_7 \right)
\end{aligned}
\tag{V.13u}$$

$$\begin{aligned}
f_{22}^p = & \ell \theta_0 p q^2 \left(\frac{1}{2} v_2 w_2 w_3 - \frac{1}{2} v_2 w_2 w_5 - \frac{3}{2} v_2 w_2 w_7 + \frac{1}{4} v_5 w_2^2 - \right. \\
& \left. - 10 v_5 w_3 w_7 + v_5 w_6 w_7 \right) + \\
& + q \left(- \frac{4}{9} v_2 w_2^2 - \frac{64}{225} v_2 w_3^2 - \frac{256}{945} v_2 w_6^2 - \frac{17.408}{4.725} v_2 w_7^2 + \right. \\
& + \frac{64}{45} v_2 w_3 w_5 - \frac{256}{225} v_2 w_3 w_6 + \frac{5.888}{315} v_2 w_3 w_7 + \\
& + \frac{1.984}{1.575} v_2 w_5 w_6 - \frac{8.704}{1.575} v_2 w_5 w_7 + \frac{9.472}{2.205} v_2 w_6 w_7 - \\
& - \frac{256}{45} v_5 w_2 w_3 + \frac{512}{225} v_5 w_2 w_5 + \frac{4.352}{1.575} v_2 w_2 w_6 + \\
& \left. + \frac{22.528}{1.575} v_5 w_2 w_7 \right)
\end{aligned}$$

(V.13v)

$$\begin{aligned}
f_{23}^p = & \ell \theta_0 q^4 \left(\frac{9}{32} w_2^4 + 12w_3^4 + 9w_5^4 + 9w_6^4 + 72w_7^4 + 6w_2^2 w_3 w_5 + 3w_2^2 w_5 w_6 + \right. \\
& + 36w_3 w_5^2 w_6 + 96w_3 w_6 w_7^2 + 6w_2^2 w_3^2 + 3w_2^2 w_5^2 + 3w_2^2 w_6^2 + 12w_2^2 w_7^2 + \\
& + 36w_3^2 w_5^2 + 36w_3^2 w_6^2 + 96w_3^2 w_7^2 + 18w_5^2 w_6^2 + 72w_5^2 w_7^2 + 48w_6^2 w_7^2 \Big) + \\
& + \frac{q^3}{p} \left(- \frac{128}{15} w_2^3 w_3 - \frac{128}{25} w_2^3 w_5 - \frac{128}{175} w_2^3 w_6 - \frac{1.536}{175} w_2^3 w_7 - \right. \\
& - \frac{1.024}{35} w_2 w_3^3 - \frac{18.432}{875} w_2 w_5^3 + \frac{72.192}{25.025} w_2 w_6^3 - \frac{1.179.648}{25.025} w_2 w_7^3 - \\
& - \frac{2.048}{21} w_2 w_3^2 w_5 + \frac{2.048}{175} w_2 w_3^2 w_6 - \frac{8.192}{315} w_2 w_3^2 w_7 - \\
& - \frac{2.048}{35} w_2 w_3 w_5^2 - \frac{137.216}{2.625} w_2 w_5^2 w_6 - \frac{24.576}{875} w_2 w_5^2 w_7 - \\
& - \frac{63.488}{735} w_2 w_5 w_6^2 - \frac{1.251.328}{28.875} w_2 w_5 w_6^2 - \frac{622.592}{2.475} w_2 w_3 w_7^2 - \\
& - \frac{1.867.776}{9.625} w_2 w_5 w_7^2 - \frac{41.713.664}{363.825} w_2 w_6 w_7^2 - \\
& - \frac{77.824}{1.225} w_2 w_3 w_5 w_6 - \frac{1.097.728}{33.075} w_2 w_5 w_6 w_7 - \\
& - \frac{16.384}{225} w_2 w_3 w_5 w_7 - \frac{311.296}{11.025} w_2 w_3 w_6 w_7 \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{24}^p = \ell \theta_0 p^4 & \left(\frac{9}{32} w_2^4 + \frac{9}{2} w_5^4 + 72w_6^4 + \frac{2.169}{2} w_7^4 + 3w_2^2 w_5^2 + 12w_2^2 w_6^2 + \right. \\
& + 57w_2^2 w_7^2 + 72w_5^2 w_6^2 + 126w_5^2 w_7^2 + 912w_6^2 w_7^2 - 6w_2^2 w_5 w_6 - 21w_2^2 w_5 w_7 + \\
& \left. + 21w_2^2 w_6 w_7 \right) + \frac{p^3}{q} \left(-\frac{128}{25} w_2^3 w_5 - \frac{1.536}{175} w_2^3 w_6 + \right. \\
& + \frac{4.608}{175} w_2^3 w_7 - \frac{18.432}{1.225} w_2 w_5^3 + \frac{1.179.648}{25.025} w_2 w_6^3 + \\
& + \frac{303.169.536}{175.175} w_2 w_7^3 - \frac{1.867.776}{13.475} w_2 w_5 w_6^2 - \frac{30.244.864}{40.425} w_2 w_5 w_7^2 - \\
& - \frac{8.323.072}{33.075} w_2 w_5 w_6 w_7 + \frac{9.216}{175} w_2 w_5^2 w_6 + \frac{1.040.384}{3.675} w_2 w_5^2 w_7 + \\
& \left. + \frac{120.979.456}{363.825} w_2 w_6 w_7^2 + \frac{316.276.736}{363.825} w_2 w_6^2 w_7 \right)
\end{aligned}$$

(V.13x)

$$\begin{aligned}
f_{25}^p = & \varepsilon \theta_0 p^2 q^2 \left(w_2^2 w_3^2 - w_2^2 w_5^2 + \frac{5}{2} w_2^2 w_6^2 + \frac{23}{2} w_2^2 w_7^2 - w_2^2 w_3 w_5 - 4w_2^2 w_3 w_7 + w_2^2 w_5 w_6 + \right. \\
& + \frac{5}{2} w_2^2 w_5 w_7 + 8w_2^2 w_6 w_7 + 2w_3^2 w_5^2 + 8w_3^2 w_6^2 + \frac{193}{4} w_3^2 w_7^2 - 4w_3^2 w_5 w_7 + 5w_3^2 w_6^2 + \\
& + 6w_3 w_5^2 w_6 + 46w_6^2 w_7^2 - 4w_3 w_6 w_7^2 + 36w_5^2 w_7^2 - 2w_5 w_6^2 w_7 - 2w_5^3 w_7 - 24w_3 w_5 w_7^2 \Big) + \\
& + pq \left(\frac{64}{45} w_2^2 w_3 - \frac{256}{225} w_2^2 w_5 + \frac{3.776}{11.025} w_2^2 w_6 + \frac{1.088}{225} w_2^2 w_7 - \frac{1.024}{315} w_2 w_3^2 w_5 + \right. \\
& + \frac{4.096}{1.575} w_2 w_3^2 w_6 + \frac{1.024}{15} w_2 w_3^2 w_7 - \frac{22.528}{11.025} w_2 w_5^2 + \frac{3.072}{525} w_2 w_3 w_5^2 - \\
& - \frac{54.272}{33.075} w_2 w_5^2 w_6 + \frac{191.488}{6.615} w_2 w_5^2 w_7 - \frac{1.553.408}{4.729.725} w_2 w_6^2 + \frac{188.416}{6.615} w_2 w_3 w_6^2 - \\
& - \frac{1.069.822}{121.275} w_2 w_5 w_6^2 - \frac{7.780.864}{51.975} w_2 w_3 w_7^2 + \frac{3.120.128}{121.275} w_2 w_6^2 w_7 - \\
& - \frac{10.026.496}{121.275} w_2 w_5 w_7^2 + \frac{18.917.888}{363.825} w_2 w_6 w_7^2 + \frac{761.274.368}{14.189.175} w_2 w_3^2 - \\
& - \frac{51.200}{3.675} w_2 w_3 w_5 w_6 - \frac{946.432}{14.175} w_2 w_3 w_5 w_7 - \frac{1.262.848}{99.225} w_2 w_3 w_6 w_7 + \\
& + \frac{6.620.416}{297.675} w_2 w_5 w_6 w_7 \Big)
\end{aligned}$$

(V.13y)

V.3. DISCRETIZAÇÃO DO FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL DO ENRIJECADOR

Analogamente ao realizado para o painel cilíndrico, a variação de energia potencial total do enrijecedor perfeito,

$$\Delta V_s = V_s - V_s^F = V_{s2} + V_{s3} + V_{s4} , \quad (V.14)$$

conforme as equações (IV.90), (IV.84) e (IV.85), é escrita

$$\begin{aligned} \Delta V_s = & \eta \frac{KR^2}{2} \int_0^{\ell} \int_{-\gamma}^{\gamma} \{ -\lambda (v_{s,\xi})^2 + (w_{s,\zeta})^2 + (u_{s,\xi})^2 + 2\nu u_{s,\xi} w_{s,\zeta} + \\ & + \frac{1-\nu}{2} (u_{s,\zeta} + w_{s,\xi})^2 + \\ & + \eta^2 \alpha [(v_{s,\zeta\zeta})^2 + (v_{s,\xi\xi})^2 + 2\nu v_{s,\zeta\zeta} v_{s,\xi\xi} + 2(1-\nu) (v_{s,\zeta\xi})^2] + \\ & + w_{s,\zeta} (v_{s,\zeta})^2 + u_{s,\xi} (v_{s,\xi})^2 + \nu [u_{s,\xi} (v_{s,\zeta})^2 + w_{s,\zeta} (v_{s,\xi})^2] + \\ & + (1-\nu) v_{s,\zeta} v_{s,\xi} (u_{s,\zeta} + w_{s,\xi}) + \frac{1}{4} [(v_{s,\zeta})^2 + (v_{s,\xi})^2]^2 \} d\zeta d\xi . \end{aligned} \quad (V.15)$$

Pela introdução do campo de deslocamentos (III.18),

$$u_s = u_3 (\sin 2q\xi - 2q\xi) + (\zeta - \epsilon) [(w_3 - w_5 + w_6) 2q \sin 2q\xi - w_7 4q \sin 4q\xi]$$

$$v_s = [v_2 + w_2 (\zeta - \epsilon) p] \sin q\xi$$

$$w_s = (1 + \zeta - \epsilon) [(w_3 - w_5 + w_6) \cos 2q\xi - w_7 (\cos 4q\xi + 3)] ,$$

em (V.15), notando que $v_{s, \zeta \zeta} = 0$, a variação de energia aproximada ΔV_s^* pode ser dada por

$$\Delta V_s^* = \eta \frac{R^2 K}{2} \{-\lambda f_1^S + f_2^S + f_3^S + 2 v f_4^S + \frac{1-v}{2} (f_5^S + f_6^S + 2f_7^S) +$$

$$+ \eta^2 \alpha [f_8^S + 2(1-v) f_9^S] + f_{10}^S + f_{11}^S + v(f_{12}^S + f_{13}^S) +$$

$$+ (1-v) (f_{14}^S + f_{15}^S) + \frac{1}{4} (f_{16}^S + f_{17}^S + 2f_{18}^S)\} ,$$

(V.16)

onde cada uma das funções f_i^S são a seguir definidas.

Funções f_i^S

$$f_1^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (v_{s,\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_2^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (w_{s,\zeta})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_3^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (u_{s,\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_4^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y u_{s,\xi} w_{s,\zeta} d\zeta d\xi$$

$$f_5^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (u_{s,\zeta})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_6^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (w_{s,\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_7^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y u_{s,\zeta} w_{s,\xi} d\zeta d\xi$$

$$f_8^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (v_{s,\xi\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_9^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (v_{s,\zeta\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_{10}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y w_{s,\zeta} (v_{s,\zeta})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_{11}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y u_{s,\xi} (v_{s,\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_{12}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y u_{s,\xi} (v_{s,\zeta})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_{13}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y w_{s,\zeta} (v_{s,\xi})^2 d\zeta d\xi$$

$$f_{14}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y v_{s,\zeta} v_{s,\xi} u_{s,\zeta} d\zeta d\xi$$

$$f_{15}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y v_{s,\zeta} v_{s,\xi} w_{s,\xi} d\zeta d\xi$$

$$f_{16}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (v_{s,\zeta})^4 d\zeta d\xi$$

$$f_{17}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (v_{s,\xi})^4 d\zeta d\xi$$

$$f_{18}^S = \int_0^L \int_{-Y}^Y (v_{s,\zeta})^2 (v_{s,\xi})^2 d\zeta d\xi$$

Estas funções f_i^S , devidamente integradas, assumem as expressões agora apresentadas.

$$f_1^S = \gamma \ell q^2 [(v_2 - \epsilon p w_2)^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 p^2 w_2^2] \quad (V.18a)$$

$$f_2^S = \gamma \ell [(w_3 - w_5 + w_6)^2 + 19w_7^2] \quad (V.18b)$$

$$f_3^S = \gamma \ell \{12q^2 u^2 - 16\epsilon q^3 u_3 (w_3 - w_5 + w_6) + \frac{16}{3} q^4 (\gamma^2 + 3\epsilon^2) [(w_3 - w_5 + w_6)^2 + 16 w_7^2]\} \quad (V.18c)$$

$$f_4^S = - \gamma \ell \{2q u_3 (w_3 - w_5 + w_6) + 12q u_3 w_7 - 4q^2 \epsilon [(w_3 - w_5 + w_6)^2 + 4w_7^2]\} \quad (V.18d)$$

$$f_5^S = \gamma \ell 4q^2 [(w_3 - w_5 + w_6)^2 + 4w_7^2] \quad (V.18e)$$

$$f_6^S = \gamma \ell \frac{4}{3} q^2 [2(1-\epsilon)^2 + \gamma^2] [(w_3 - w_5 + w_6)^2 + 4w_7^2] \quad (V.18f)$$

$$f_7^S = - \gamma \ell 4q^2 (1-\epsilon) [(w_3 - w_5 + w_6)^2 + 4w_7^2] \quad (V.18g)$$

$$f_8^S = \gamma \ell q^4 [(v_2 - \epsilon p w_2)^2 + \frac{1}{3} \gamma^2 p^2 w_2^2] \quad (V.18h)$$

$$f_9^S = \gamma \ell p^2 q^2 w_2^2 \quad (V.18i)$$

$$f_{10}^S = -\gamma\ell \frac{1}{2} p^2 w_2^2 [w_3 - w_5 + w_6 + 6w_7] \quad (V.18j)$$

$$f_{11}^S = \gamma\ell \left\{ -q^3 u_3 v_2^2 - \left(\varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) p^2 q^3 u_3 w_2^2 - 6\varepsilon p q^3 u_3 v_2 w_2 + \right. \\ \left. + 2q^4 (w_3 - w_5 + w_6) \left[-\varepsilon(v_2 - \varepsilon p w_2)^2 + \gamma^2 p w_2 \left(\frac{2}{3} v_2 - \varepsilon p w_2 \right) \right] \right\} \quad (V.18k)$$

$$f_{12}^S = \gamma\ell \{-3 p^2 q u_3 w_2^2 + 2\varepsilon p^2 q^2 w_2^2 (w_3 - w_5 + w_6)\} \quad (V.18l)$$

$$f_{13}^S = \gamma\ell q^2 \left[\frac{1}{2} (w_3 - w_5 + w_6) - 3w_7 \right] \times \\ \times [(v_2 - \varepsilon p w_2)^2 + \frac{1}{3} \gamma^2 p^2 w_2^2] \quad (V.18m)$$

$$f_{14}^S = \gamma\ell p q^2 w_2 (w_3 - w_5 + w_6) (v_2 - \varepsilon p w_2) \quad (V.18n)$$

$$f_{15}^S = -\gamma\ell p q^2 w_2 (w_3 - w_5 + w_6) [(1-\varepsilon)(v_2 - \varepsilon p w_2) + \frac{1}{3} \gamma^2 p w_2] \quad (V.18o)$$

$$f_{16}^S = \gamma\ell \frac{3}{4} p^4 w_2^4 \quad (V.18p)$$

$$f_{17}^S = \gamma \ell \frac{3}{4} q^4 \left\{ (v_2 - \epsilon p w_2)^4 + 2\gamma^2 p^2 w_2^2 \left[\frac{\gamma^2}{10} p^2 w_2^2 + (v_2 - \epsilon p w_2)^2 \right] \right\} \quad (V.18q)$$

$$f_{18}^S = \gamma \ell \frac{1}{4} p^2 q^2 w_2^2 [(v_2 - \epsilon p w_2)^2 + \frac{1}{3} \gamma^3 p^2 w_2^2] \quad (V.18r)$$

V.4. ESTABELECIMENTO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE EQUILÍBRIO

Utilizando as parcelas dos funcionais (V.10) e (V.15) já integradas, equações (V.13) e (V.18), a variação da energia potencial total aproximada do sistema painel-enrijecedor, \bar{e} escrita como em (V.8),

$$V^*(\underline{u}; \lambda) = \Delta V_p^* + \Delta V_s^* ,$$

ou, pelo que se apresenta adiante.

$$\begin{aligned}
V^*(\underline{u}; \lambda) = & \frac{R^2 K}{2} \left\{ -\lambda f_1^P + f_2^P + f_3^P + 2f_4^P + f_5^P + f_{15}^P + f_{16}^P + f_{17}^P + \right. \\
& + \frac{1}{4} (f_{23}^P + f_{24}^P) + \frac{1}{2} f_{25}^P + \nu [2(f_6^P + f_7^P) + f_{18}^P + f_{19}^P + f_{20}^P] + \\
& + (1-\nu) \left[\frac{1}{2} (f_8^P + f_9^P) + f_{10}^P + f_{21}^P + f_{22}^P \right] + \\
& \left. + \alpha [f_{11}^P + f_{12}^P + 2\nu f_{13}^P + 2(1-\nu) f_{14}^P] \right\} + \\
& + \frac{R^2 K}{2} \left\{ \eta \left[-\lambda f_1^S + f_2^S + f_3^S + f_{10}^S + f_{11}^S + \frac{1}{4} (f_{16}^S + f_{17}^S) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} f_{18}^S] + \eta \nu [2f_4^S + f_{12}^S + f_{13}^S] + \\
& + \eta(1-\nu) \left[\frac{1}{2} (f_5^S + f_6^S) + f_7^S + f_{14}^S + f_{15}^S \right] + \\
& \left. + \eta^3 \alpha [f_8^S + 2(1-\nu) f_9^S] \right\} .
\end{aligned}$$

(V.19)

Aplicando o Princípio da Estacionariedade em (V.19) vem

$$\delta V^*(\underline{u}; \lambda) = 0 \quad (V.20)$$

sendo

$$\underline{u} \equiv \underline{u}(u_2; u_3; v_2; v_5; w_2; w_3; w_5; w_6; w_7) \quad (V.21)$$

ou, genericamente,

$$\underline{u} \equiv \underline{u}(w_i) . \quad (V.22)$$

Associando cada uma das nove componentes de \underline{u} em (V.21) a amplitudes w_i , a extremização de V^* , já discretizado, conduz a

$$\frac{\partial V^*}{\partial w_i} (\underline{u}; \lambda) = 0 \quad ; \quad i = 1, 9 , \quad (V.23)$$

gerando um sistema de nove equações algébricas não-lineares de equilíbrio.

Estas equações serão apresentadas a seguir nos Quadros V.1, V.2 e V.3, da forma:

QUADRO V.1 - Duas equações não lineares de equilíbrio relativos as amplitudes u_2 e u_3 do deslocamento axial u ;

QUADRO V.2 - Duas equações não-lineares de equilíbrio relativas às amplitudes v_2 e v_5 do deslocamento circunferencial v ;

QUADRO V.3 - Cinco equações não-lineares de equilíbrio relativos as amplitudes w_2 , w_3 , w_5 , w_6 e w_7 ao deslocamento radial w .

Começo da 1ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial u_2} = & -\frac{1}{2} \ell \theta_0 [(\nu-1) p^2 - 2q^2] u_2 + \frac{32q}{3p} u_3 - \frac{\nu+1}{2} \ell \theta_0 p q v_2 - \frac{8}{9} (9\nu-1) v_5 - \nu \ell \theta_0 q w_2 + \\ & + \frac{8\nu}{3p} w_3 + \frac{8\nu}{9p} w_5 - \frac{8\nu}{45p} w_6 - \frac{352\nu}{45p} w_7 - \\ & - \frac{4}{9p} [(3\nu-1) p^2 + 2q^2] w_2^2 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q [(\nu-1) p^2 + 2q^2] w_2 w_3 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q (p^2 + q^2) w_2 w_5 - \\ & - \frac{3}{2} \ell \theta_0 p^2 q (3\nu-1) w_2 w_7 - \frac{128 q^2}{15p} w_3^2 + \frac{64}{45p} [(\nu-1) p^2 - 4q^2] w_3 w_5 - \\ & - \frac{256}{225p} [(\nu-1) p^2 - q^2] w_3 w_6 + \frac{256}{315p} [23(\nu-1) p^2 + 4q^2] w_3 w_7 - \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.1 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento axial u (continuação)

Continuação da 1ª equação

$$\begin{aligned} & - \frac{64}{225p} [(15\nu-1) p^2 + 14q^2] w_5^2 - \frac{64}{1575p} [(81\nu+31) p^2 + 76q^2] w_5 w_6 - \\ & - \frac{512}{4725p} [(5\nu-51) p^2 - 42q^2] w_5 w_7 - \frac{128}{945p} [2(57\nu-1) p^2 + 31q^2] w_6^2 + \\ & + \frac{256}{11025p} [(681\nu-185) p^2 + 76q^2] w_6 w_7 - \frac{1024}{4725p} [(375\nu-17) p^2 + 70q^2] w_7^2 = 0 \end{aligned} \quad (V.24)$$

Fim da 1ª equação

Quadro V.1 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento axial u (continuação)

Começo da 2ª equação

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V^*}{\partial u_3} = & \frac{32q}{3p} u_2 + 24 \ell \theta_0 q^2 u_3 - \frac{64}{3} v v_2 - \frac{64}{3} \frac{v}{p} w_2 + 4 v \ell \theta_0 q w_3 - \\
 & - \frac{1}{2} \ell \theta_0 q (3 v p^2 + q^2) w_2^2 + \frac{256}{15} \frac{q^2}{p} w_2 w_3 + \frac{256}{45p} (3 v p^2 + q^2) w_2 w_5 - \\
 & - \frac{256}{225p} (12 v p^2 + q^2) w_2 w_6 - \frac{64}{315p} (413 v p^2 + 16 q^2) w_2 w_7 - 8 \ell \theta_0 q^3 w_3^2 - \\
 & - 4 \ell \theta_0 q (v p^2 + q^2) w_5^2 + 4 \ell \theta_0 q (7 v p^2 + 2 q^2) w_5 w_7 - 4 \ell \theta_0 q (4 v p^2 + q^2) w_6^2 - \\
 & - 4 \ell \theta_0 q (19 v p^2 + 4 q^2) w_7^2 + n \gamma \ell \left\{ 24 q^2 u_3 - 4 q (4 \varepsilon q^2 - v) (w_3 - w_5 + w_6) + \right. \\
 & \left. + 24 v q w_7 - 6 \varepsilon p q^3 v_2 w_2 - q^3 v_2^2 - p^2 q \left[\left(\frac{\gamma^2}{3} + \varepsilon^2 \right) q^2 + 3 v \right] w_2^2 \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{V.25}$$

Fim da 2ª equação

Quadro V.2 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento circunferencial v

Começo da 3ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial v_2} = & - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p q (v+1) u_2 - \frac{64v}{3} u_3 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [2p^2 - (v+1) q^2] v_2 - \\ & - \frac{32}{9pq} [2p^2 - (v-1) q^2] v_5 + \ell \theta_0 p w_2 - \frac{8}{3q} w_3 - \frac{8}{9q} w_5 + \frac{8}{45q} w_6 + \frac{352}{45q} w_7 + \\ & + \frac{4}{9q} [2p^2 + (3v-1) q^2] w_2^2 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p q^2 (3v-1) w_2 w_3 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p (p^2 + q^2) w_2 w_5 + \\ & + \frac{3}{2} \ell \theta_0 p [2p^2 + (v-1) q^2] w_2 w_7 + \frac{128}{15} v q w_3^2 + \frac{64}{45} (3v+1) q w_3 w_5 - \frac{256q}{225} w_3 w_6 + \\ & + \frac{256}{315} (19v-23) q w_3 w_7 + \frac{64}{225q} [14p^2 + (15v-1) q^2] w_5^2 + \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 3ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{64}{1575q} [112p^2 + (45\nu+31) q^2] w_5 w_6 - \frac{512}{1575q} [62p^2 - (3\nu-17) q^2] w_5 w_7 + \\
 & + \frac{128}{945q} [112p^2 + (33\nu-2) q^2] w_6^2 - \frac{256}{11025q} [496p^2 + (261\nu-185) q^2] w_6 w_7 + \\
 & + \frac{512}{4725q} [311p^2 + 2(87\nu-17) q^2] w_7^2 + \eta\gamma\ell \left\{ -2q^2 (\lambda-\eta^2\alpha q^2) v_2 + 2\varepsilon p q^2 (\lambda-\eta^2\alpha q^2) w_2 - \right. \\
 & - 2q^3 u_3 v_2 - 6\varepsilon p q^3 u_3 w_2 + q^2 (\nu-4\varepsilon q^2) (v_2 w_3 - v_2 w_5 + v_2 w_6) - 6\nu q^2 v_2 w_7 - \frac{9}{4} \varepsilon p q^4 v_2^2 w_2 + \\
 & + \frac{3}{4} q^4 v_2^3 + \frac{1}{4} p^2 q^2 [3q^2 (3\varepsilon^2 + \gamma^2) + 1] v_2 w_2^2 + p q^2 \left[4q^2 \left(\varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.2 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento circunferencial v (continuação)

Continuação da 3ª equação

$$\left. + \varepsilon(1-2\nu)] (w_2 w_3 - w_2 w_5 + w_2 w_6) + 6\nu \varepsilon p q^2 w_2 w_7 - \frac{1}{4} \varepsilon p^3 q^2 [3q^2 (\varepsilon^2 + \gamma^2) + 1] w_2^3 \right\} = 0$$

(v.26)

Fim da 3ª equação

Começo da 4ª equação

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V^*}{\partial v_5} = & - \frac{8(9v-1)}{9} u_2 - \frac{32}{9pq} [2p^2 - (v-1) q^2] v_2 + 2\ell\theta_0 [6p^2 - (v-1) q^2] v_5 - \\
 & - \frac{64}{9q} w_2 + 2\ell\theta_0 p w_5 - 12\ell\theta_0 p w_7 + \\
 & + \frac{1}{4} \ell\theta_0 [3p^2 - (2v-1) q] w_2^2 + \frac{256}{45} (2v-1) q w_2 w_3 - \frac{256}{225q} [3p^2 - (5v+2) q^2] w_2 w_5 + \\
 & + \frac{64}{1575q} [528p^2 - (129v-68) q^2] w_2 w_6 + \frac{1024}{1575q} [27p^2 - (29v-22) q^2] w_2 w_7 - \\
 & - 8v\ell\theta_0 pq^2 w_3 w_5 - 2v\ell\theta_0 pq^2 w_3 w_6 + \ell\theta_0 pq^2 (19v-10) w_3 w_7 - \\
 & - 8\ell\theta_0 p^3 w_5 w_6 + \ell\theta_0 p [24p^2 + (3v+1) q^2] w_6 w_7 = 0
 \end{aligned}
 \tag{V.27}$$

Fim da 4ª equação

Começo da 5ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial w_2} = & -v \ell \theta_0 q u_2 - \frac{64v}{3p} u_3 + \ell \theta_0 p v_2 - \frac{64}{9q} v_5 + \ell \theta_0 [1 - \lambda q^2 + \alpha(q^2 + p^2)^2] w_2 - \\ & - \frac{8}{3pq} [1 - 4\lambda q^2 + 4\alpha q^4] w_3 - \frac{8}{9pq} \{1 - 4\lambda q^2 + 4\alpha[p^4 + q^4 - 2(3v-4)p^2q^2]\} w_5 + \\ & + \frac{8}{45pq} \{1 - 4\lambda q^2 + 4\alpha[2p^4 + q^4 - (27v-32)p^2q^2]\} w_6 + \\ & + \frac{32}{45pq} \{11 + 4\lambda q^2 + 4\alpha[11p^4 - q^4 + 2(9v-4)p^2q^2]\} w_7 - \\ & - \frac{8}{9p} [(3v-1)p^2 + 2q^2] u_2 w_2 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q [(v-1)p^2 + 2q^2] u_2 w_3 + \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \ell_{\theta_0} q (p^2 + q^2) u_2 w_5 - \frac{3}{2} \ell_{\theta_0} p^2 q (3\nu - 1) u_2 w_7 - \ell_{\theta_0} q (3\nu p^2 + q^2) u_3 w_2 + \\
 & + \frac{256q^2}{15p} u_3 w_3 + \frac{256}{45p} (3\nu p^2 + q^2) u_3 w_5 - \frac{256}{225p} (12\nu p^2 + q^2) u_3 w_6 - \\
 & - \frac{64}{315p} (413\nu p^2 + 16q^2) u_3 w_7 + \frac{8}{9q} [2p^2 + (3\nu - 1)q^2] v_2 w_2 - \\
 & - \frac{1}{2} \ell_{\theta_0} p q^2 (3\nu - 1) v_2 w_3 - \frac{1}{2} \ell_{\theta_0} p (p^2 + q^2) v_2 w_5 + \frac{3}{2} \ell_{\theta_0} p [2p^2 + (\nu - 1)q^2] v_2 w_7 + \\
 & + \frac{1}{2} \ell_{\theta_0} p [3p^2 - (2\nu - 1)q^2] v_5 w_2 + \frac{256}{45} (2\nu - 1) q v_5 w_3 -
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{256}{225q} [3p^2 - (5\nu+2) q^2] v_5 w_5 + \frac{64}{1575q} [528p^2 - (129\nu-68) q^2] v_5 w_6 + \\
 & + \frac{1024}{1575q} [27p^2 - (29\nu-22) q^2] v_5 w_7 + \frac{8}{3pq} (p^2+\nu q^2) w_2^2 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 (p^2+4\nu q^2) w_2 w_3 - \\
 & - \frac{3}{4} \ell \theta_0 (p^2+\nu q^2) w_2 w_5 + \frac{3}{2} \ell \theta_0 (3p^2+\nu q^2) w_2 w_7 + \frac{32\nu q}{5p} w_3^2 + \frac{32}{15pq} (21p^2+2\nu q^2) w_3 w_5 - \\
 & - \frac{64}{225pq} (14p^2+3\nu q^2) w_3 w_6 - \frac{16}{315pq} (248p^2+343\nu q^2) w_3 w_7 + \frac{672}{225pq} (p^2+\nu q^2) w_5^2 + \\
 & + \frac{32}{525pq} (147p^2+38\nu q^2) w_5 w_6 - \frac{16}{1575pq} (1488p^2+2401\nu q^2) w_5 w_7 + \frac{32}{315pq} (140p^2+31\nu q^2) w_6^2 -
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{16}{11025pq} (15624p^2 + 6517vq^2) w_6 w_7 + \frac{32}{1575pq} (2777p^2 + 112vq^2) w_7^2 + - \frac{9}{32} \ell \theta_0 (p^4 + q^4) w_2^3 + \\
 & + \frac{32q}{15p} (p^2 - 3q^2) w_2^2 w_3 + \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_2 w_3^2 - \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 3q^2) w_2 w_3 w_5 - 4\ell \theta_0 p^2 q^2 w_2 w_3 w_7 - \\
 & - \frac{32}{75pq} [9(p^4 + q^4) + 4p^2 q^2] w_2^2 w_5 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(p^4 + q^4) + 2p^2 q^2] w_2 w_5^2 - \\
 & - \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2p^2 q^2] w_2 w_5 w_6 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 - 5q^2) w_2 w_5 w_7 - \\
 & - \frac{32}{3675pq} [9(84p^4 + 7q^4) - 59p^2 q^2] w_2^2 w_6 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_2 w_6^2 +
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_2 w_6 w_7 + \frac{32}{525pq} [108(3p^4 - q^4) + 119p^2 q^2] w_2^2 w_7 + \\
 & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(19p^4 - 4q^4) + 23p^2 q^2] w_2 w_7^2 - \frac{256q^3}{35p} w_3^3 - \frac{512q}{315p} (p^2 + 15q^2) w_3^2 w_5 + \\
 & + \frac{512q}{175p} (p^2 - 5q^2) w_3 w_5^2 - \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_3 w_5 w_6 - \\
 & - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_3 w_5 w_7 + \frac{512q}{1575p} (4p^2 + 9q^2) w_3^2 w_6 + \\
 & + \frac{512q}{6615p} (184p^2 - 279q^2) w_3 w_6^2 + \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_3 w_6 w_7 +
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{512q}{315p} (21p^2 - 4q^2) w_3^2 w_7 - \frac{256q}{51975p} (15197p^2 + 12768q^2) w_3 w_7^2 - \\
 & - \frac{512}{55125pq} [81(5p^4 + 7q^4) + 110p^2q^2] w_5^3 + \frac{256}{165375pq} [63(135p^4 - 134q^4) - 530p^2q^2] w_5^2 w_6 - \\
 & - \frac{1}{606375pq} [1536(13680p^4 + 4277q^4) + 2674555p^2q^2] w_5 w_6^2 - \\
 & - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861p^2q^2] w_5 w_6 w_7 + \\
 & + \frac{512}{165375pq} [36(635p^4 - 63q^4) + 4675p^2q^2] w_5^2 w_7 -
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{256}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915p^2q^2] w_5 w_7^2 + \\
 & + \frac{128}{4729725pq} [81(5376p^4 + 329q^4) - 6068p^2q^2] w_6^3 + \frac{512p}{363825q} (154432p^2 + 9141q^2) w_6^2 w_7 + \\
 & + \frac{256}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949p^2q^2] w_6 w_7^2 - \\
 & - \frac{512}{14189175pq} [64(187353p^4 + 5103q^4) + 743432p^2q^2] w_7^3 + \eta\gamma\ell \left\{ 2\varepsilon pq^2 (\lambda - \eta^2\alpha q^2) v_2 - \right. \\
 & \left. - pq^2 \left[2 \left(\varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) (\lambda - \eta^2\alpha q^2) - 4\eta^2\alpha(1-\nu) \right] w_2 - 2p^2q \left[\left(\varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + 3\nu \right] u_3 w_2 - 6\varepsilon pq^3 u_3 v_2 + \right.
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 5ª equação

$$\begin{aligned}
 & + p q^2 \left[4 q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \epsilon(1-2\nu) \right] (v_2 w_3 - v_2 w_5 + v_2 w_6) + 6\nu\epsilon p q^2 v_2 w_7 + \\
 & + \frac{1}{4} p^2 q^2 \left[9 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + 1 \right] v_2^2 w_2 - \frac{3}{4} \epsilon p q^4 v_2^3 - \\
 & - \frac{3}{4} \epsilon p^3 q^2 [3(\epsilon^2 + \gamma^2) q^2 + 1] v_2 w_2^2 + \left\{ - p^2 [1 + 4\epsilon(\epsilon^2 + \gamma^2) q^4] + p^2 q^2 [\epsilon(4\nu + 3\nu\epsilon - 2\epsilon) + \right. \\
 & \left. + \gamma^2 \left(\nu - \frac{2}{3} \right)] \right\} (w_2 w_3 - w_2 w_5 + w_2 w_6) - 6p^2 \left[\nu q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + 1 \right] w_2 w_7 + \\
 & + \frac{1}{4} p^4 \left[3 + 3 q^4 \left(\frac{\gamma^4}{5} + 2\epsilon^2 \gamma^2 + \epsilon^4 \right) + 2q^2 \left(\frac{\gamma^2}{3} + \epsilon^2 \right) \right] w_2^3 \Big\} = 0
 \end{aligned}$$

Fim da 5ª equação

(V.28)

Começo da 6ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial w_3} = & \frac{8\nu}{3p} u_2 + 4\nu \ell \theta_0 q u_3 - \frac{8}{3q} v_2 - \frac{8}{3pq} [1-4\lambda q^2 + 4\alpha q^4] w_2 + 2\ell \theta_0 [1-4\lambda q^2 + 16\alpha q^4] w_3 + \\ & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q [(\nu-1) p^2 + 2q^2] u_2 w_2 - \frac{256q^2}{15p} u_2 w_3 + \frac{64}{45p} [(\nu-1) p^2 - 4q^2] u_2 w_5 - \\ & - \frac{256}{225p} [(\nu-1) p^2 - q^2] u_2 w_6 + \frac{256}{315p} [23(\nu-1) p^2 + 4q^2] u_2 w_7 + \frac{256q^2}{15p} u_3 w_2 - 16\ell \theta_0 q^3 u_3 w_3 - \\ & - \frac{3\nu-1}{2} \ell \theta_0 pq^2 v_2 w_2 + \frac{256}{15} \nu q v_2 w_3 + \frac{64}{45} (3\nu+1) q v_2 w_5 - \frac{256}{225} q v_2 w_6 + \\ & + \frac{256}{315} (19\nu-23) q v_2 w_7 + \frac{256}{45} q (2\nu-1) v_5 w_2 - 8\nu \ell \theta_0 pq^2 v_5 w_5 - 2\nu \ell \theta_0 pq^2 v_5 w_6 + \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 6ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \ell \theta_0 p q^2 (19\nu - 10) \nu_5 w_7 - \frac{1}{4} \ell \theta_0 (p^2 + 4\nu q^2) w_2^2 + \frac{64q}{5p} \nu w_2 w_3 + \frac{32}{15pq} (21p^2 + 2\nu q^2) w_2 w_5 - \\
 & - \frac{64}{225pq} (14p^2 + 3\nu q^2) w_2 w_6 - \frac{16}{315pq} (248p^2 + 343\nu q^2) w_2 w_7 + 2\ell \theta_0 (7p^2 + 9\nu q^2) w_5 w_7 + \\
 & + \frac{32q}{45p} (p^2 - 3q^2) w_2^3 + \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_2^2 w_3 - \frac{768q^3}{35p} w_2 w_3^2 - \\
 & - \frac{1024q}{315p} (p^2 + 15q^2) w_2 w_3 w_5 + \frac{1024q}{1575p} (4p^2 + 9q^2) w_2 w_3 w_6 + \frac{1024q}{315p} (21p^2 - 4q^2) w_2 w_3 w_7 - \\
 & - \frac{1}{2} \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 3q^2) w_2^2 w_5 + \frac{512q}{175p} (p^2 - 5q^2) w_2 w_5^2 - \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_2 w_5 w_6 -
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 6ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_2 w_5 w_7 + \frac{512q}{6615p} (184p^2 - 279q^2) w_2 w_6^2 + \\
 & + \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_2 w_6 w_7 - 2\ell\theta_0 p^2 q^2 w_2^2 w_7 - \frac{256q}{51975p} (15197p^2 + 12768q^2) w_2 w_7^2 + \\
 & + 12\ell\theta_0 q^4 w_3^3 + 2\ell\theta_0 q^2 (p^2 + 9q^2) w_3 w_5^2 - 4\ell\theta_0 p^2 q^2 w_3 w_5 w_7 + 2\ell\theta_0 q^2 (4p^2 + 9q^2) w_3 w_6^2 + \\
 & + \frac{1}{4} \ell\theta_0 q^2 (193p^2 + 192q^2) w_3 w_7^2 + 3\ell\theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_5^2 w_6 - \\
 & - 12\ell\theta_0 p^2 q^2 w_5 w_7^2 - 2\ell\theta_0 q^2 (p^2 - 12q^2) w_6 w_7^2 +
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 6ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \eta \gamma \ell \left\{ -4q (4\epsilon q^2 - \nu) u_3 + \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\epsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 4q^2 [2\nu(1-\epsilon-\nu) + \epsilon(\epsilon-2-\nu\epsilon)] \right\} (w_3 - w_5 + w_6) + \right. \\
 & + q^2 \left[\frac{\nu}{2} - 2\epsilon q^2 \right] v_2^2 + pq^2 \left[4 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + \epsilon(1-2\nu) \right] v_2 w_2 - \\
 & \left. - p^2 \left\{ \frac{1}{2} + 2\epsilon q^4 (\epsilon^2 + \gamma^2) - q^2 \left[\epsilon(2\nu + \frac{3}{2} \nu\epsilon - \epsilon) + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} w_2^2 \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{V.29}$$

Fim da 6ª equação

Começo da 7ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial w_5} = & \frac{8\nu}{9p} u_2 - \frac{8}{9q} v_2 + 2\ell\theta_0 p v_5 - \frac{8}{9pq} \{1-4\lambda q^2 + 4\alpha[p^4+q^4 - 2(3\nu-4) p^2q^2]\} w_2 + \ell\theta_0 [1-4\lambda q^2+ \\ & + 16\alpha[p^4+q^4+2p^2q^2] w_5 + \frac{1}{2} \ell\theta_0 q(p^2+q^2) u_2 w_2 + \frac{64}{45p} [(\nu-1) p^2-4q^2] u_2 w_3 - \frac{128}{225p} [(15\nu-1) p^2 + 14q^2] u_2 w_5 - \\ & - \frac{64}{1575p} [(81\nu+31) p^2 + 76q^2] u_2 w_6 - \frac{512}{4725p} [(5\nu-51) p^2 - 42q^2] u_2 w_7 + \frac{256}{45p} (3\nu p^2+q^2) u_3 w_2 - \\ & - 8\ell\theta_0 q (\nu p^2+q^2) u_3 w_5 + 4\ell\theta_0 q (7\nu p^2+2q^2) u_3 w_7 - \frac{1}{2} \ell\theta_0 p(p^2+q^2) v_2 w_2 + \\ & + \frac{64}{45} (3\nu+1) q v_2 w_3 + \frac{128}{225q} [14p^2 + (15\nu-1) q^2] v_2 w_5 + \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 7ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{64}{1575q} [112p^2 + (45\nu+31) q^2] v_2 w_6 - \frac{512}{1575q} [62p^2 - (3\nu-17) q^2] v_2 w_7 - \\
 & - \frac{256}{225q} [3p^2 - (5\nu+2) q^2] v_5 w_2 - 8\nu \ell \theta_0 p q^2 v_5 w_3 - 8\ell \theta_0 p^3 v_5 w_6 - \\
 & - \frac{3}{8} \ell \theta_0 (p^2 + \nu q^2) w_2^2 + \frac{32}{15pq} (21p^2 + 2\nu q^2) w_2 w_3 + \frac{1344}{225pq} (p^2 + \nu q^2) w_2 w_5 + \\
 & + \frac{32}{525pq} (147p^2 + 38\nu q^2) w_2 w_6 - \frac{16}{1575pq} (1488p^2 + 2401\nu q^2) w_2 w_7 + \\
 & + 2\ell \theta_0 (7p + 9\nu q^2) w_3 w_7 + \ell \theta_0 (19p^2 + 9\nu q^2) w_6 w_7 -
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 7ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{32}{225pq} [9(p^4+q^4) + 4p^2q^2] w_2^3 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 q^2 (p^2-3q^2) w_2^2 w_3 - \frac{512q}{315p} (p^2+15q^2) w_2 w_3^2 + \\
 & + \frac{1024q}{175p} (p^2-5q^2) w_2 w_3 w_5 - \frac{1024q}{3675p} (25p^2+57q^2) w_2 w_3 w_6 - \\
 & - \frac{128q}{14175p} (3697p^2+2016q^2) w_2 w_3 w_7 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(p^4+q^4) + 2p^2q^2] w_2^2 w_5 - \\
 & - \frac{512}{18375pq} [81(5p^4+7q^4) + 110p^2q^2] w_2 w_5^2 + \\
 & + \frac{512}{165375pq} [63(135p^4-134q^4) - 530p^2q^2] w_2 w_5 w_6 +
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 7ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1024}{165375pq} [36(635p^4 - 63q^4) + 4675p^2q^2] w_2 w_5 w_7 - \frac{1}{4} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2p^2q^2] w_2^2 w_6 - \\
 & - \frac{1}{606375pq} [1536(13680p^4 + 4277q^4) + 2674555p^2q^2] w_2 w_6^2 - \\
 & - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861p^2q^2] w_2 w_6 w_7 - \\
 & - \frac{1}{4} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 - 5q^2) w_2^2 w_7 - \frac{256}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915p^2q^2] w_2 w_7^2 + \\
 & + 2\ell \theta_0 q^2 (p^2 + 9q^2) w_3^2 w_5 + 6\ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_3 w_5 w_6 - 2\ell \theta_0 p^2 q^2 w_3^2 w_7 -
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 7ª equação

$$\begin{aligned}
 & - 12\ell\theta_0 p^2 q^2 w_3 w_2^2 + \frac{9}{2} \ell\theta_0 (p^4 + 2q^4) w_5^3 + \ell\theta_0 [9(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_5 w_6^2 - \\
 & - 3\ell\theta_0 p^2 q^2 w_5^2 w_7 + 9\ell\theta_0 (7p^4 + 4q^4 + 4p^2 q^2) w_5 w_7^2 - \ell\theta_0 p^2 q^2 w_6^2 w_7 - \\
 & - \eta\gamma\ell \left\{ - 4q (4\epsilon q^2 - \nu) u_3 + \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\epsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 4q^2 [2\nu(1 - \epsilon - \nu) + \epsilon(\epsilon - 2 - \nu\epsilon)] \right\} (w_3 - w_5 + w_6) + \right. \\
 & + q^2 \left[\frac{\nu}{2} - 2\epsilon q^2 \right] v_2^2 + pq^2 \left[4 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + \epsilon(1 - 2\nu) \right] v_2 w_2 - \\
 & \left. - p^2 \left\{ \frac{1}{2} + 2\epsilon q^4 (\epsilon^2 + \gamma^2) - q^2 \left[\epsilon \left(2\nu + \frac{3}{2} \nu\epsilon - \epsilon \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} w_2^2 \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Fim da 7ª equação

(V.30)

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Começo da 8ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial w_6} = & - \frac{8\nu}{45p} u_2 + \frac{8}{45q} v_2 + \frac{8}{45pq} \{1-4\lambda q^2 + 4\alpha[2p^4+q^4-(27\nu-32)p^2q^2]\} w_2 + \ell\theta_0 [1-4\lambda q^2 + 16\alpha(16p^4+q^4+8p^2q^2)] w_6 + \\ & - \frac{256}{225p} [(\nu-1)p^2-q^2] u_2 w_3 - \frac{64}{1575p} [(81\nu+31)p^2 + 76q^2] u_2 w_5 - \\ & - \frac{256}{945p} [2(57\nu-1)p^2 + 31q^2] u_2 w_6 + \frac{256}{11025p} [(681\nu-185)p^2 + 76q^2] u_2 w_7 - \\ & - \frac{256}{225p} (12\nu p^2+q^2) u_3 w_2 - 8\ell\theta_0 q (4\nu p^2+q^2) u_3 w_6 - \\ & - \frac{256q}{225} v_2 w_3 + \frac{64}{1575q} [112p^2 + (45\nu+31)q^2] v_2 w_5 + \frac{256}{945q} [112p^2 + (33\nu-2)q^2] v_2 w_6 - \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 8ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{256}{11025q} [496p^2 + (261\nu - 185) q^2] v_2 w_7 + \frac{64}{1575q} [528p^2 - (129\nu - 68) q^2] v_5 w_2 - \\
 & - 2\ell\theta_0 \nu p q^2 v_5 w_3 - 8\ell\theta_0 p^3 v_5 w_5 + \ell\theta_0 p [24p^2 + (3\nu + 1) q^2] v_5 w_7 - \\
 & - \frac{64}{225pq} (14p^2 + 3\nu q^2) w_2 w_3 + \frac{32}{525pq} (147p^2 + 38\nu q^2) w_2 w_5 + \frac{64}{315pq} (140p^2 + 31\nu q^2) w_2 w_6 - \\
 & - \frac{16}{11025pq} (15624p^2 + 6517\nu q^2) w_2 w_7 + \ell\theta_0 (19p^2 + 9\nu q^2) w_5 w_7 - \\
 & - \frac{32}{11025pq} [9(84p^4 + 7q^4) - 59p^2 q^2] w_3^2 + \frac{512q}{1575p} (4p^2 + 9q^2) w_2 w_3^2 -
 \end{aligned}$$

continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 8ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_2 w_3 w_5 + \frac{1024q}{6615p} (184p^2 - 279q^2) w_2 w_3 w_6 + \\
 & + \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_2 w_3 w_7 - \frac{1}{4} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2p^2 q^2] w_2^2 w_5 + \\
 & + \frac{256}{165375pq} [63(135p^4 - 134q^4) - 530p^2 q^2] w_2 w_5^2 - \\
 & - \frac{2}{606375pq} [1536(13680p^4 + 4277q^4) + 2674555p^2 q^2] w_2 w_5 w_6 - \\
 & - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4 + 25861p^2 q^2)] w_2 w_5 w_7 +
 \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 8ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_2^2 w_6 + \frac{128}{1576575pq} [81(5376p^4 + 329q^4) - 6068p^2 q^2] w_2 w_6^2 + \\
 & + \frac{1024p}{363825q} [154432p^2 + 9141q^2] w_2 w_6 w_7 + \frac{1}{4} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_2^2 w_7 + \\
 & + \frac{256}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949p^2 q^2] w_2 w_7^2 + 3\ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_3 w_5^2 + \\
 & + 2\ell \theta_0 q^2 (4p^2 + 9q^2) w_3^2 w_6 - 2\ell \theta_0 q^2 (p^2 - 12q^2) w_3 w_7^2 + \ell \theta_0 [9(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_5^2 w_6 - \\
 & - 2\ell \theta_0 p^2 q^2 w_5 w_6 w_7 + 9\ell \theta_0 (8p^4 + q^4) w_6^3 + 2\ell \theta_0 [12(19p^4 + q^4) + 23p^2 q^2] w_6 w_7^2 +
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 8ª equação

$$+ n\gamma\ell \left\{ -4q(4\epsilon q^2 - \nu) u_3 + \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\epsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 4q^2 [2\nu(1-\epsilon-\nu) + \epsilon(\epsilon-2-\nu\epsilon)] \right\} (w_3 - w_5 + w_6) \right.$$

$$+ q^2 \left[\frac{\nu}{2} - 2\epsilon q^2 \right] v_2^2 + pq^2 \left[4 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + \epsilon(1-2\nu) \right] v_2 w_2 -$$

$$- p^2 \left\{ \frac{1}{2} + 2\epsilon q^4 (\epsilon^2 + \gamma^2) - q^2 \left[\epsilon 2\nu + \frac{3}{2} \nu\epsilon - \epsilon \right] + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{3} \right) \right\} w_2^2 \Bigg\} = 0$$

(V.31)

Fim da 8ª equação

Começo da 9ª equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial w_7} = & - \frac{352\nu}{45p} u_2 + \frac{352}{45q} v_2 - 12\ell\theta_0 p v_5 + \frac{32}{45pq} \{11 + 4\lambda q^2 + 4\alpha[11p^4 - q^4 + 2(9\nu-4) p^2 q^2]\} w_2 + \\ & + \ell\theta_0 \{19-16\lambda q^2 + 4\alpha[76p^4 + 89q^4 + 32p^2 q^2]\} w_7 - \frac{3}{2} \ell\theta_0 p^2 q (3\nu-1) u_2 w_2 + \frac{256}{315p} [23(\nu-1) p^2 + 4q^2] u_2 w_3 - \\ & - \frac{512}{4725p} [(5\nu-51) p^2 - 42q^2] u_2 w_5 + \frac{256}{11025p} [(681\nu-185) p^2 + 76 q^2] u_2 w_6 - \frac{2048}{4725p} [(375\nu-17) p^2 + \\ & + 70q^2] u_2 w_7 - \frac{64}{315p} (413\nu p^2 + 16q^2) u_3 w_2 + 4\ell\theta_0 (7\nu p^2 + 2q^2) u_3 w_5 - 8\ell\theta_0 q (19\nu p^2 + 4q^2) u_3 w_7 + \\ & + \frac{3}{2} \ell\theta_0 p [2p^2 + (\nu-1) q^2] v_2 w_2 + \frac{256q}{315} (19\nu-23) v_2 w_3 - \end{aligned}$$

Continua

Continuação da 9ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{512}{1575q} [62p^2 - (3\nu-17) q^2] v_2 w_5 - \frac{256}{11025q} [496p^2 + (261\nu-185) q^2] v_2 w_6 + \\
 & + \frac{1024}{4725q} [311p^2 + 2(87\nu-17) q^2] v_2 w_7 + \frac{1024}{1575q} [27 p^2 - (29\nu-22) q^2] v_5 w_2 + \\
 & + \ell\theta_0 pq^2 (19\nu-10) v_5 w_3 + \ell\theta_0 p[24p^2 + (3\nu+1) q^2] v_5 w_6 + \frac{3}{4} \ell\theta_0 (3p^2+\nu q^2) w_2^2 - \\
 & - \frac{16}{315pq} (248p^2+343\nu q^2) w_2 w_3 - \frac{16}{1575pq} (1488p^2+2401\nu q^2) w_2 w_5 - \\
 & - \frac{16}{11025pq} (15624p^2+ 6517\nu q^2) w_2 w_6 + \frac{64}{1575pq} (2777p^2-112\nu q^2) w_2 w_7 +
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 9ª equação

$$\begin{aligned}
 & + 2\ell\theta_0 (7p^2+9vq^2) w_3 w_5 + \ell\theta_0 (19p^2+9vq^2) w_5 w_6 + \frac{32}{1575pq} [108(3p^4-q^4) + 119p^2q^2] w_2^3 - \\
 & - 2\ell\theta_0 p^2q^2 w_2^2 w_3 + \frac{512q}{315p} (21p^2-4q^2) w_2 w_3^2 - \frac{128q}{14175p} (3697p^2+2016q^2) w_2 w_3 w_5 + \\
 & + \frac{128q}{99225p} (4933p^2-5472q^2) w_2 w_3 w_6 - \frac{512q}{51975p} (15197p^2+12768q^2) w_2 w_3 w_7 - \\
 & - \frac{1}{4} \ell\theta_0 p^2 (21p^2-5q^2) w_2^2 w_5 + \frac{512}{165375pq} [36(635p^4-63q^4) + 4675p^2q^2] w_2 w_5^2 - \\
 & - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4+67q^4) + 25861p^2q^2] w_2 w_5 w_6 -
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 9ª equação

$$\begin{aligned}
 & - \frac{512}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915p^2q^2] w_2 w_5 w_7 + \frac{1}{4} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_2^2 w_6 + \\
 & + \frac{512p}{363826q} (154432p^2 + 9141q^2) w_2 w_6^2 + \frac{512}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949p^2q^2] w_2 w_6 w_7 + \\
 & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(19p^4 + 4q^4) + 23p^2q^2] w_2^2 w_7 - \\
 & - \frac{512}{4729725pq} [64(187353p^4 + 5103q^4) + 743432p^2q^2] w_2 w_7^2 - 2\ell \theta_0 p^2 q^2 w_3^2 w_5 - \\
 & - 24\ell \theta_0 p^2 q^2 w_3 w_5 w_7 - 4\ell \theta_0 q^2 (p^2 - 12q^2) w_3 w_6 w_7 +
 \end{aligned}$$

Continua

Quadro V.3 - Equações de equilíbrio relativas ao deslocamento radial w (continuação)

Continuação da 9ª equação

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \ell \theta_0 q^2 (193p^2 + 192q^2) w_3^2 w_7 - \ell \theta_0 p^2 q^2 w_3^3 - \ell \theta_0 p^2 q^2 w_5 w_6^2 + \\
 & + 9\ell \theta_0 (7p^4 + 4q^4 + 4p^2 q^2) w_5^2 w_7 + 2\ell \theta_0 [12(19p^4 + q^4) + 23p^2 q^2] w_6^2 w_7 + \\
 & + \frac{9}{2} \ell \theta_0 (241p^4 + 16q^4) w_7^3 + \\
 & + \eta \gamma \ell \left\{ 24\nu q u_3 + \left\{ 38 + \frac{512}{3} (3\varepsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 16q^2 \left[\varepsilon(\varepsilon - 4\nu - \nu\varepsilon) + \frac{\gamma^2}{3} \right] \right\} w_7 + \right. \\
 & \left. + 6\nu\varepsilon pq^2 v_2 w_2 - 3\nu q^2 v_2^2 - p^2 [\nu q^2 (3\varepsilon^2 + \gamma^2) + 3] w_2^2 \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{V.32}$$

Fim da 9ª equação

CAPÍTULO VI

AVALIAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO

VI.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

No desenvolvimento do cálculo do funcional de energia, abordado no Capítulo V, algumas observações podem ser efetuadas, sob o ponto de vista matemático, tais como as que se seguem:

a) Este funcional envolve, em suas parcelas referentes ao painel cilíndrico, conjuntos de funções na forma

$$\int_0^{\ell} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\xi) g(\theta) d\theta d\xi, \quad (\text{VI.1})$$

onde $f(\xi)$ e $g(\theta)$ são combinações das funções seno e cosseno em $iq\xi$ e $jp\theta$, respectivamente, sendo i e j inteiros positivos, como se apresenta nas tabelas de integrações constantes do Anexo A.

As integrais (VI.1) conduzem, isoladamente, a resultados dos tipos:

$$(i) \ 0 \text{ ou}$$

$$(ii) \ \alpha_1 \ell \text{ ou}$$

$$(iii) \ \frac{\alpha_2}{q},$$

para as integrações em ξ , e

$$(iv) \ 0 \text{ ou}$$

$$(v) \ \alpha_3 \theta_0 \text{ ou}$$

$$(vi) \ \frac{\alpha_4}{p},$$

para as integrações em θ , sendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 números reais.

De outro modo, quando (VI.1) acopladas, o produto

$$\int_0^\ell f(\xi) \, d\xi \times \int_{-\theta_0}^{\theta_0} g(\theta) \, d\theta \quad (VI.2)$$

fornece, como resultados, combinações das formas:

$$(vii) \ 0 \text{ e } 0 \text{ ou}$$

$$(viii) \ \alpha_1 \ell \text{ e } 0 \text{ ou}$$

$$(ix) \ 0 \text{ e } \alpha_3 \theta_0 \text{ ou}$$

$$(x) \ \alpha_1 \ell \text{ e } \alpha_3 \theta_0 \text{ ou}$$

$$(xi) \ \frac{\alpha_2}{q} \text{ e } \frac{\alpha_4}{p},$$

ou seja, a integral dupla (VI.1) conduz a múltiplos de $\ell \theta_0$, a múltiplos de $1/q$ ou a valores nulos.

É, ainda, conveniente ressaltar que soluções combinando respostas dos tipos (ii) e (vi) ou (iii) e (v) não foram obtidas, uma vez que (iii) e (vi) são resultados ligados à consideração de um painel cilíndrico ou, de outra forma, surgem em função da natureza dos limites de integração.

b) Lembrando ser

$$q = \frac{n\pi}{\ell}$$

e n o número de semi-ondas longitudinais, tem-se que optar por um número n ímpar no tratamento das funções seno e/ou cosseno de argumentos de configurações $iq\xi$, dado que, como se observa na tabela A.1, um número par de semi-ondas longitudinais anularia inúmeras integrações em ξ e, conseqüentemente, eliminaria grande parte das parcelas do funcional. Estas integrais estão associadas às respostas em $1/q$.

A análise da paridade do produto ip não se faz necessária para argumentos em θ , já que o número de ondas circunferenciais p tem seu valor perfeitamente definido pela equação (II.1), além da própria natureza dos limites de integração nesta direção.

Resumindo, o funcional de energia apresenta parcelas em $\ell \theta_0$ e em $1/pq$. Isto é, parcelas dependendo unicamente dos parâmetros geométricos ou, unicamente, dos números de ondas circunferenciais e longitudinais, no que diz respeito ao processo

de integração. E, estas últimas, estão ligadas a consideração de um número ímpar de semi-ondas longitudinais.

VI.2. JUSTIFICATIVAS DE HIPÓTESES MECÂNICAS SOB O PONTO DE VISTA MATEMÁTICO

O processo de discretização do funcional permite justificar algumas das considerações mecânicas, intuitivas ou experimentais, adotadas para o estabelecimento dos campos de deslocamentos de cascas cilíndricas, submetidas à compressão axial.

A primeira hipótese a ser examinada trata do conceito de acoplamento modal. Sob o ponto de vista matemático, associa-se a ocorrência de acoplamento entre modos com integrais não nulas do tipo (VI.1), as quais envolvem produtos desses modos. Pode-se mostrar (vide tabela A.1) que um número par de semi-ondas longitudinais destruiria, como comentado anteriormente, parte dos acoplamentos modais responsáveis pela redução de rigidez de um painel da casca, durante a resposta não-linear.

No trabalho de JUSTINO [10], as equações não-lineares de equilíbrio são fornecidas envolvendo apenas os termos em $\ell \theta_0$, associados a um número par de semi-ondas longitudinais. Assim, em princípio, a não consideração de todo o acoplamento modal, juntamente com as observações apresentadas na seção (III.2), a respeito do conjunto de modos tomados para definição do campo de deslocamentos, podem esclarecer alguns dos motivos de não se ter registrado, neste trabalho, e no de referência [22], caminhos de equilíbrios pós-críticos instáveis, para as cascas

enrijecidas longitudinalmente.

Uma análise criteriosa do funcional de energia potencial total permite verificar que, neste caso, quase todos os acoplamentos modais definidos nas parcelas de energia de membrana do painel cilíndrico desaparecem. Isto equivale a consideração, quase exclusiva, da parcela linear de energia de flexão no funcional, ou seja, uma pequena participação da energia não-linear de membrana. Por outro lado, são exatamente estas contribuições que possibilitam o acoplamento não-linear entre modos e a conseqüente perda de rigidez durante a resposta pós-crítica.

Concluindo-se, as parcelas mais severamente reduzidas, pela erosão assim provocada no funcional, serão aquelas que envolvem o quadrado das rotações $w_{,\theta}$ e $w_{,\xi}$. Uma avaliação mais detalhada a esse respeito será realizada na próxima seção.

A segunda hipótese a ser examinada advem dos resultados das integrações da tabela A.1, onde se verifica que acoplamentos dos tipos

$$(a) \sin^2 iq\xi \cos jq\xi ,$$

$$(b) \cos^2 iq\xi \cos jq\xi \text{ e}$$

$$(c) \sin^2 iq\xi \cos jq\xi \cos mq\xi$$

somente se realizam quando $2i=j$, para (a) e (b) e $2i=j$ ou $2i=m$, para (c).

Tais acoplamentos modais aparecem em parcelas do funcional que também envolvem os quadrados das rotações $w_{,\theta}$ e $w_{,\xi}$, ratificando as considerações de DONNELL, bem como as de BATISTA, comentados no Capítulo III, quando, em seus trabalhos (referên-

cias [23,4,6,7]), estabelece campos de deslocamentos para a casca cilíndrica envolvendo modos secundários com duas vezes o número de semi-ondas longitudinais do modo crítico.

Esta associação entre número de ondas que compõe a combinação modal básica no processo de perda de rigidez da casca, pode, também, ser observada na direção circunferencial. Nota-se, pela tabela A.2, que combinações modais, por exemplo, na forma $\sin^2 i p \theta \cos j p \theta$, são destruídas para relações $j \neq 2i$.

Finalmente, chama-se a atenção para outra característica resultante da formulação modal do tipo aqui apresentada, similar às encontradas em trabalhos anteriores [4,7,10]. Trata-se da contração radial $w^S(0,0)$ constatada experimentalmente [4], a qual tem sido eliminada naturalmente nas já referidas análises teóricas não-lineares.

No presente estudo, este modo secundário foi eliminado do problema pela imposição das condições de contorno de casca bi-apoiada, conforme realizado no item (III.4).

VI.3. ANÁLISE QUALITATIVA DO ACOPLAMENTO MODAL

As considerações feitas na seção anterior, sobre a ocorrência de acoplamento não-linear entre modos e as formas de combinações modais que possibilitam a observação do fenômeno de perda de rigidez, durante a resposta não-linear de uma casca cilíndrica, são utilizadas, a seguir, para uma análise qualitativa do problema.

Para tanto, reescreve-se a equação da variação total de energia fornecida em (V.9),

$$\Delta V_p \equiv V_{p2} + V_{p3} + V_{p4} , \quad (VI.3)$$

da maneira apresentada por BATISTA [4] e ANTONINI [7], ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta V_p &\equiv u_{m2} + u_f + \lambda V_{m2} + u_{m3} + u_{m4} \equiv \\ &\equiv u_{m2} + u_f + \lambda V_{m2}^{\theta} + \lambda V_{m2}^{\xi} + u_{m3} + u_{m4} \end{aligned} \quad (VI.4)$$

onde se definem:

u_{m2} - parcela de energia incremental de membrana, proveniente de sua segunda variação;

u_f - parcela de energia de flexão;

λV_{m2} - parcela de energia potencial de membrana (parte de sua segunda variação, a qual se relaciona linearmente com o parâmetro de carga e pode ser decomposta em: λV_{m2}^{ξ} , segundo a direção axial, e λV_{m2}^{θ} , segundo a direção circunferencial);

u_{m3} - terceira variação da energia incremental de membrana; e

u_{m4} - quarta variação da energia incremental de membrana.

Utilizando a notação da seção (IV.3.1) para as deformações específicas e resultantes de esforços e momentos internos,

lembrando que os termos lineares são representados por (') e os quadráticos por ("), tem-se:

$$u_{m2} = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (N'_\xi \epsilon'_\xi + N'_\theta \epsilon'_\theta + 2N'_{\xi\theta} \epsilon'_{\xi\theta}) d\theta d\xi \quad (\text{VI.5a})$$

$$u_{m3} = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [N''_\xi \epsilon'_\xi + N'_\xi \epsilon''_\xi + N''_\theta \epsilon'_\theta + N'_\theta \epsilon''_\theta + 2(N''_{\xi\theta} \epsilon'_\theta + N'_{\xi\theta} \epsilon''_\theta)] d\theta d\xi \quad (\text{VI.5b})$$

$$u_{m4} = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (N''_\xi \epsilon''_\xi + N''_\theta \epsilon''_\theta + 2N''_{\xi\theta} \epsilon''_{\xi\theta}) d\theta d\xi \quad (\text{VI.5c})$$

$$\lambda V_{m2}^\xi = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (N''_\xi \epsilon_\xi^F + N_\xi^F \epsilon_\xi'') d\theta d\xi \quad (\text{VI.5d})$$

$$\lambda V_{m2}^\theta = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} N_\theta'' \epsilon_\theta^F d\theta d\xi \quad (\text{VI.5e})$$

$$u_f = \frac{R^2}{2} \int_0^\ell \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (M'_\xi \chi'_\xi + M'_\theta \chi'_\theta + 2M'_{\xi\theta} \chi'_{\xi\theta}) d\theta d\xi \quad (\text{VI.5f})$$

Pesquisando-se os acoplamentos modais que se definem em cada uma das parcelas de energia (VI.5), levando em conta a paridade do número de semi-ondas longitudinais, verifica-se a análise das contribuições de energia realizada por ANTONINI [7].

Dentre estas parcelas de energia, as contribuições positivas são dadas por Δu_m , λV_{m2}^θ e u_f , chamadas parcelas estabilizadoras [4], onde

$$\Delta u_m = u_{m2} + u_{m3} + u_{m4} , \quad (VI.6)$$

conforme é ilustrado pela figura (VI.1).

Tem-se, assim, que o acoplamento não-linear entre modos reduz mais severamente a maior contribuição estabilizadora λv_{m2}^{θ} , como se pode observar com auxílio da figura (VI.2b). Reduz-se, também, a variação de energia de membrana Δu_m , principalmente em suas contribuições mais significativas, ou seja, em suas componentes cúbicas de u_{m3} e quárticas de u_{m4} , como mostrado nas figuras (VI.2c) e (VI.3). Observa-se que, em ambos os casos, referimo-nos exatamente àquelas parcelas de energia que envolvem os quadrados das rotações $w_{p,\theta}$ e $w_{p,\xi}$.

Melhor dizendo, na hipótese do painel cilíndrico de casca enrijecida longitudinalmente, a adoção de um número ímpar de semi-ondas longitudinais não destrói termos não-lineares das parcelas positivas λv_{m2}^{θ} e u_{m4} do funcional de energia, responsáveis pelo acoplamento modal durante a resposta pós-crítica, o qual, por sua vez, tende a reduzir a rigidez da casca durante este processo não-linear.

Por outro lado, a adoção de um número par de semi-ondas longitudinais destrói um grande número de termos não-lineares, principalmente aqueles associados a u_{m3} . Esta parcela de energia constitui uma contribuição negativa (vide figura (VI.3)) e, portanto, desestabilizadora de energia, isto é, o seu cancelamento conduziria a um acréscimo de rigidez pós-crítica do painel e uma conseqüente estabilização da casca durante a resposta não-linear.

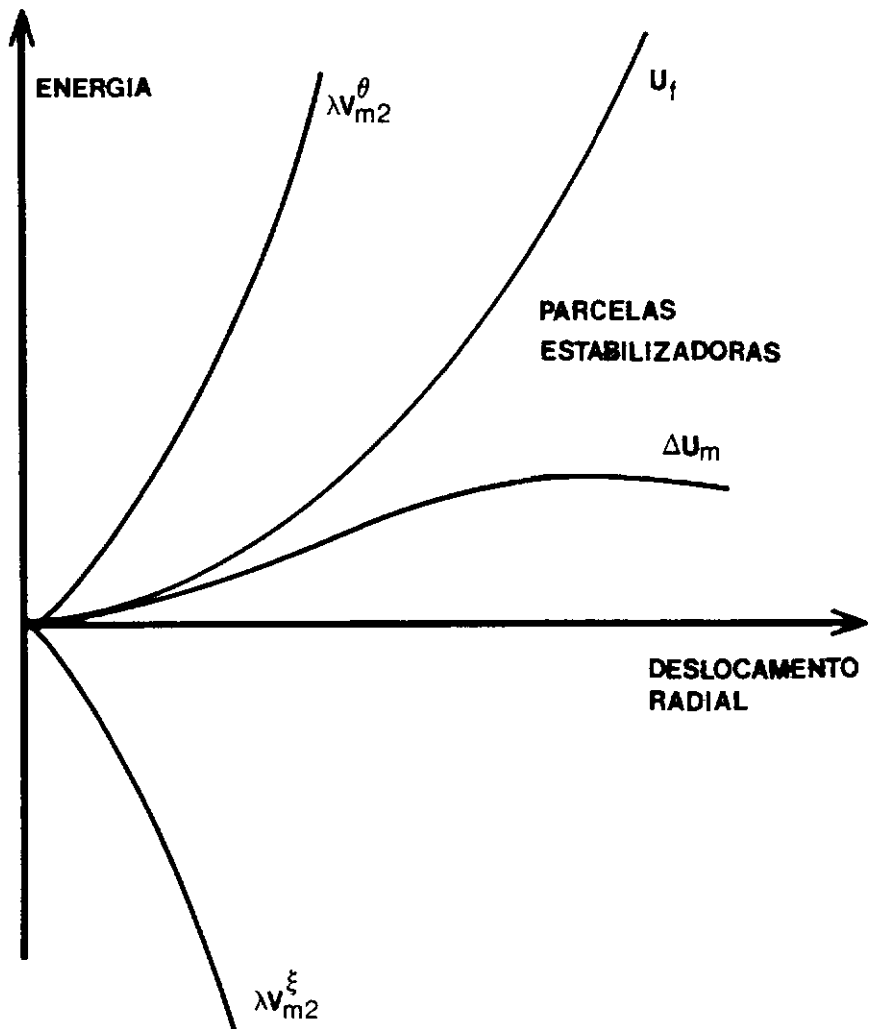


FIGURA VI.1 - PARCELAS DE ENERGIA POTENCIAL INCREMENTAL [7]

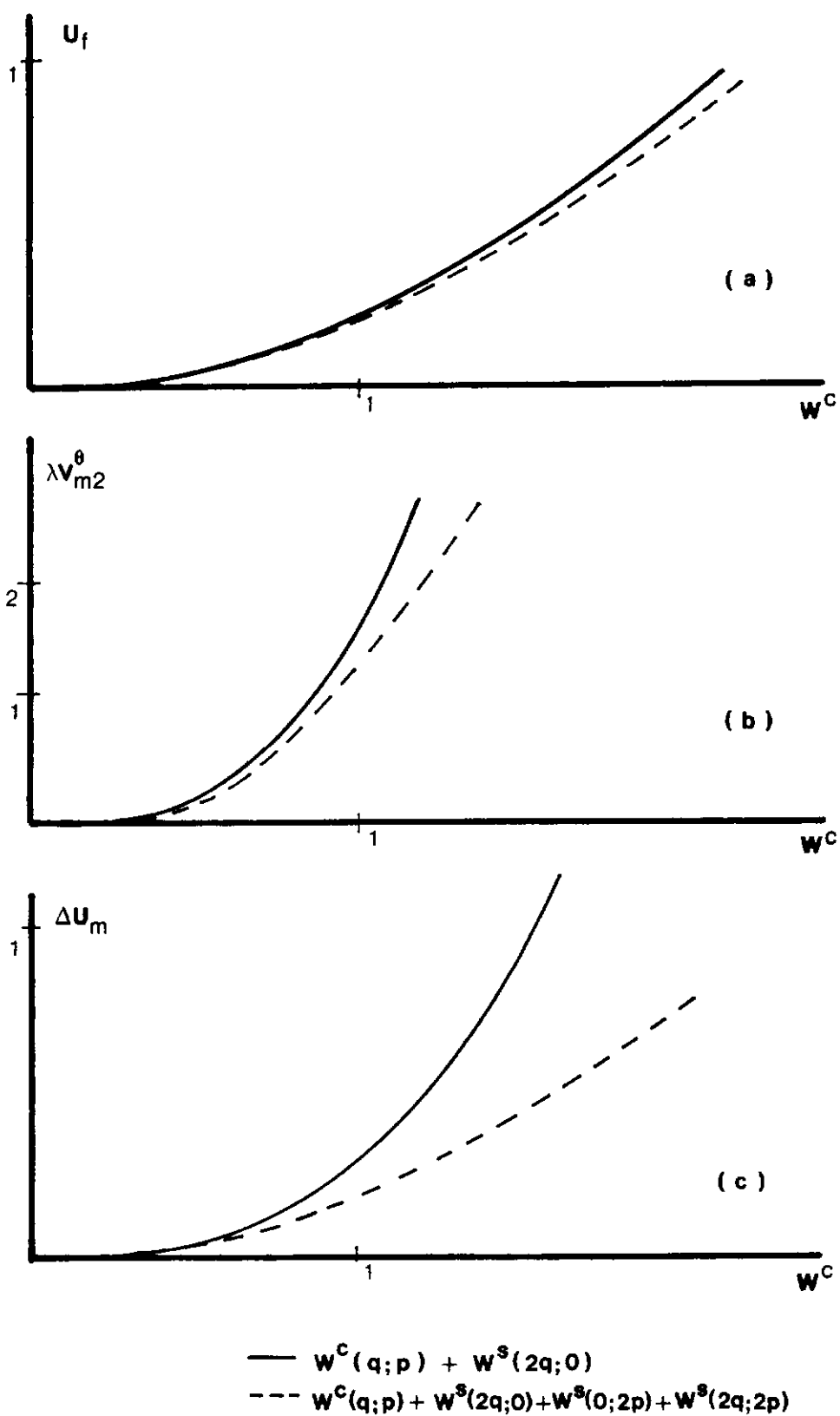


FIGURA VI.2 - CONTRIBUIÇÕES DAS ENERGIAS DE FLEXÃO, POTENCIAL DE MEMBRANA E INCREMENTAL DE MEMBRANA [7]

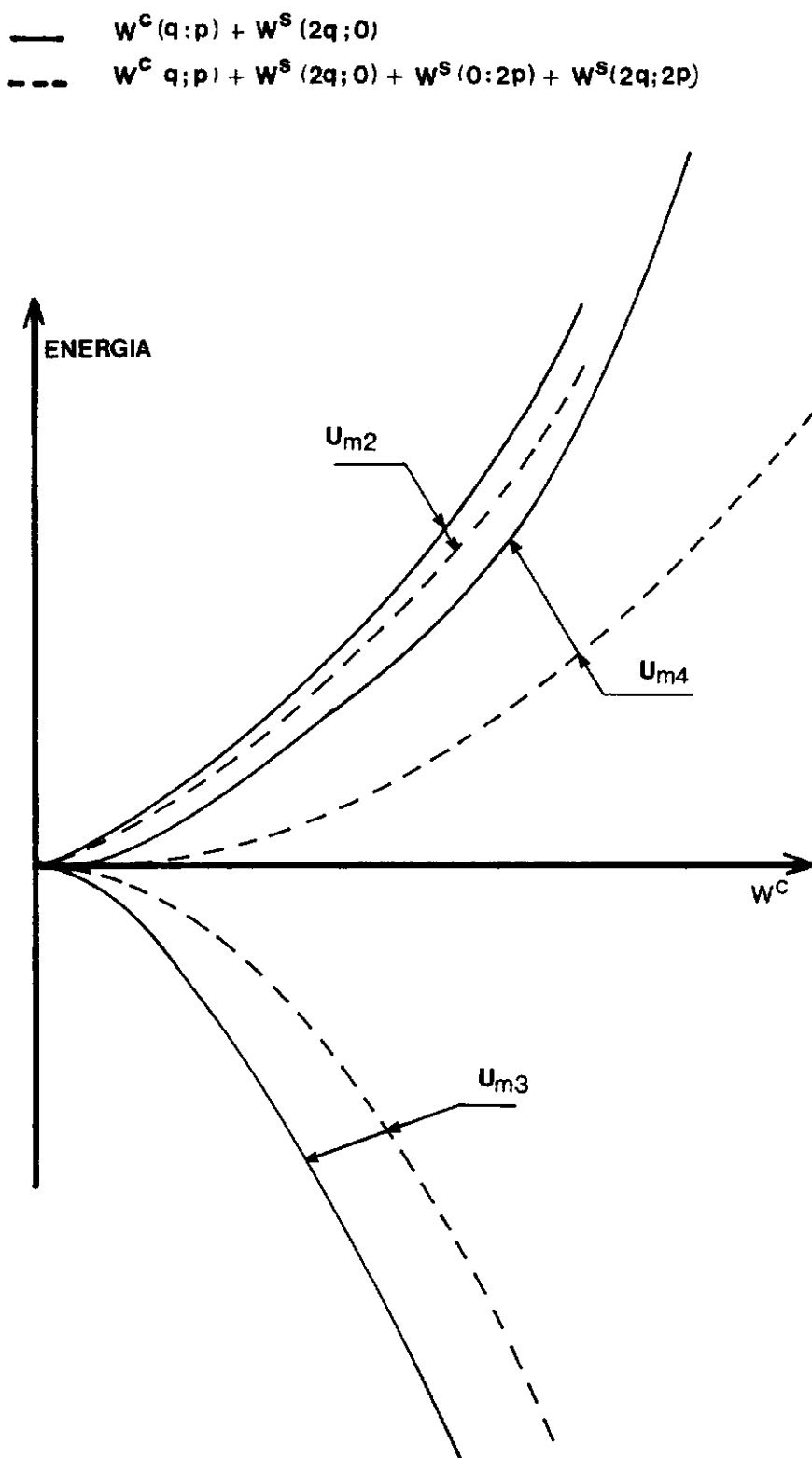


FIGURA VI.3 - VARIAÇÃO DAS COMPONENTES U_{m2} , U_{m3} E U_{m4} COM O AUMENTO DO ACOPLAMENTO MODAL [7]

CAPÍTULO VII

COMENTÁRIOS FINAIS

Modelos experimentais tem mostrado que estruturas delgadas de cascas cilíndricas comprimidas axialmente, com enrijecedores longitudinais, esbeltos e espaçados, podem apresentar comportamento instável associado a cargas de flambagem, as quais são bastante inferiores às estimadas teoricamente. Por outro, as prescrições constantes de normas de projeto são baseadas em muitos resultados experimentais obtidos de ensaios de cascas do tipo ortotrôpica, cujo comportamento não-linear de flambagem é intrinsecamente distinto do tipo de casca enrijecida aqui analisada.

Independentemente da presença de imperfeições iniciais, a interação não-linear entre os vários modos de deslocamentos (da casca e do enrijecedor) é, sem dúvida alguma, assim como na casca isotrôpica, um fator de influência preponderante nesta resposta de flambagem. A dificuldade analítica encontrada para demonstrar este fenômeno se deve à própria complexidade do processo não-linear que ocorre em presença do grande número de possíveis acoplamentos modais.

Assim, numa análise multimodos, deve-se considerar a interação entre famílias de modos críticos da casca e do enrijecedor e outros modos secundários, que aos primeiros se acoplem. Deve-se incluir, então, nesta análise, tanto os modos de ondas longas, que dominam em estados pré-flambagem, quanto os modos de ondas curtas, dominantes em estados pós-flambagem avançados, bem como os acoplamentos decorrentes da presença de imperfeições iniciais. Evidentemente, esta é uma proposta de trabalho extremamente árdua e quaisquer simplificações que possam ser realizadas advêm de um conhecimento prévio dos modos dominantes e das amplitudes de imperfeições em cada um desses modos. Mesmo assim, o mecanismo gerador da instabilidade pode ser insuficiente para a análise do problema, já que hipóteses iniciais, não obstante questionáveis, são geralmente adotadas com o intuito de simplificar, ainda mais, o modelo matemático e, portanto, viabilizar o processo de cálculo. Com tantas dificuldades, os resultados de estimativas de carga de flambagem, numa análise multimodos, se tornam algumas vezes inadequados.

Baseando-se nestas evidências, pode-se prever que o modelo matemático ora proposto, contrariamente a todos os outros até então encontrados na literatura, apresenta as características necessárias para torná-lo um modelo consistente para a descrição dos caminhos pós-críticos de cascas cilíndricas enrijecidas.

Sua estruturação básica está no estabelecimento do campo de deslocamentos, (u,v,w) do painel cilíndrico, constituído por funções trigonométricas selecionadas da solução em série do sistema de equações diferenciais, que rege o comportamento não-linear da casca cilíndrica isotrópica. A escolha dessas funções

é feita visando-se atender aproximadamente, e de um modo global, às condições de contorno e compatibilidade inerentes a uma casca cilíndrica enrijecida, notadamente nas junções painel-enrijecedor. Isto é feito, através de: (a) definição do campo de deslocamentos do enrijecedor como uma função do campo do painel; (b) restrições de deslocamentos impostas pelas relações de compatibilidade e simetria (ou antissimetria). Em outras palavras, estes campos de deslocamentos guardam a combinação necessária para gerar os acoplamentos modais que devem reproduzir teoricamente a resposta não-linear obtida em modelos experimentais dessas estruturas. Essa propriedade é mais claramente observada pela análise qualitativa da influência das interações não-lineares nas diversas parcelas de energia de deformação elástica que contribuem para a montagem do funcional de energia potencial total. Verifica-se que as funções propostas originam acoplamentos não-lineares que resultam em reduções substanciais de energia (ou rigidez), as quais ocorrem durante o fenômeno de instabilidade.

A investigação da validade teórica-numérica do modelo proposto deve ser buscada através de implementação computacional, como a sugerida no Apêndice B. A solução numérica das equações não-lineares de equilíbrio aqui apresentadas proporcionará a uma análise da estabilidade dessas cascas através do exame das respostas não-lineares relativas aos caminhos pós-críticos de equilíbrio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DONNELL, L.H. A New Theory for the Buckling of Thin Cylinder Under Axial Compression and Bending; Trans. ASME, 56, p. 795, 1934.
- [2] VON KÄRMÄN, T.; TSIEN, H.S. The Buckling of Thin Cylindrical Shells Under Axial Compression; J. Aero. Sci., vol. 8, p. 303, 1941.
- [3] KOITER, W.T. Over de Stabiliteit Van Het Elastisch Evenwicht (On the Stability of Elastic Equilibrium); Dissertation, Delft, H.J., Paris, Amsterdam, 1945. English Translation, NASA TT F-10, p. 833, 1967.
- [4] BATISTA, R.C. Lower Bound Estimates for Cylindrical Shell Buckling; Ph. D. Thesis, University College, London, 1979.
- [5] BATISTA, R.C.; CROLL, J.G.A. A Desing Approach for Axially Compressed Unstiffened Cylinders; Inst. of Physics Conf. - Stability Prob. in Eng. Structures and Components, Cardiff, Sep., 1978 (ed. Richards, T.H., Stanley, P.), Applied Science Publishers, 1979.
- [6] _____. Explicit Lower - Bounds for the Buckling of

Axially Loaded Cylinders; Int. J. Mech. Sci., vol. 23, nº 6, pp. 331-343, 1981.

- [7] ANTONINI, R.C. Influência da Interação entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas Axialmente Comprimidas; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1981.
- [8] GONÇALVES, P.B. Instabilidade e Sensibilidade de Cascas Cilíndricas Circunferencialmente Enrijecidas; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1983.
- [9] GONÇALVES, P.B.; BATISTA, R.C. Buckling and Sensitivity Estimates for Ring-Stiffened Cylinders Under External Pressure; Int. J. Mech. Sci., vol. 27, No. 1, pp. 1-11, 1985.
- [10] JUSTINO FILHO, M.R. Estabilidade Local de Painéis Cilíndricos Enrijecidos; Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, 1982.
- [11] SINGER, J.; ARBOCZ, J.; BABOCK, C.D. Buckling of Imperfect Stiffened Cylindrical Shells Under Axial Compression; AIAA Journal, vol. 9, number 1, pp. 68-75, June, 1970.
- [12] HUTCHINSON, J.W.; AMAZIGO, J.C. Imperfection Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells; AIAA Journal, vol. 5, pp. 392-401, 1967.
- [13] ARBOCZ, J.; SECHLER, E.E. On the Buckling of Stiffened Imperfect Shells; AIAA Journal, 14, pp. 1611-1617, Nov., 1976.
- [14] ARBOCZ, J.; WILLIAMS, J.G. Imperfection Surveys on a 10 tf - Diameter Shells Structures; AIAA Journal, 15,

number 1, pp. 949-956, July, 1977.

- [15] SINGER, J.; HAFTKA, R. Buckling of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells and Elastically Restrained Panels; Tae Report Number 91, Technion, Haifa, 1974.
- [16] WANG, J.T.; LIN, Y. Stability of Discretely Stringer Stiffened Cylindrical Shells; AIAA Journal, vol. 11, No. 1, pp. 810-814, June, 1973.
- [17] WALKER, A.C.; ANDRONICOU, A.; SRIDHARAN, S. Experimental Investigation of the Buckling of Stiffened Shells using Small Scale Models; Buckling of Shells in offshore structures - An International Conference, Imperial College of Science & Technology, London, April, 1981.
- [18] ELLINAS, C.P.; BATISTA, R.C.; CROLL, G.A. Overall Buckling of Stringer Stiffened Cylinders; Proc. Instn. Civ. Engrs, Part 2, 71, pp. 479-512, June, 1981.
- [19] SYNGELLAKIS, S.; WALKER, A.C. Elastic Buckling of Stiffened Cylindrical Shells; Int. Symp. on the Integraty of Offshore Structures, Glasgow, 1978.
- [20] KOITER, W.T. Buckling and Post-Buckling Behaviour of a Cylindrical Panel Under Axial Compression; NLR Rep. 5476, Rep. Trans., Aero Res. Int., 20, 1956.
- [21] GONÇALVES, P.B. Interação Dinâmica Não-Linear entre Fluido e Casca Delgadas; Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, pp. 180-187, 1987.
- [22] SYNGELLAKIS, S.; WALKER, A.C. Elastic Buckling of

Cylinders with Widely Spaced Stiffeners; parte de
Theory of Shells, T. Koiter e G.K. Mikhailov, Holland
Publishing Company, 1980.

- [23] DONNELL, L.H., WAW, C.C. Effect of Imperfections on
Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial
Compression; Trans. ASME, vol. 72, p. 73, 1950.
- [24] TIMOSHENKO, S.; GERE, J.M. Theory of Elastic Stability;
McGraw-Hill, 2nd Edition, pp. 457-519, 1983.
- [25] ALMROTH, B.O. Postbuckling Behavior of Axially Compressed
Circular Cylinders; AIAA Journal, vol. 1, p. 630, 1963.
- [26] BRUSH, D.O., ALMROTH, B.O. Buckling of Bars, Plates and
Shells; McGraw-Hill, 1975.

APÊNDICE A

TABELAS DE INTEGRAÇÕES DAS FUNÇÕES CONSTANTES NO
FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Notações:

$\text{sen } iq \, \xi = \text{sen } i \frac{n\pi}{\ell} \, \xi = A_i$

$\text{cos } iq \, \xi = \text{cos } i \frac{n\pi}{\ell} \, \xi = B_i$

Nas expressões seguintes, i, j, m, k e n são constantes inteiras positivas quaisquer restritas se indicado.

Começo da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^\ell f(\xi) \, d\xi$
1	A_i	$0, i \text{ par ou } n \text{ par}$ $\frac{2}{iq}, i \text{ e } n \text{ ímpares}$
2	B_i	0
3	A_i^2	$\frac{\ell}{2}$

Continua

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
4	B_i^2	$\frac{\ell}{2}$
5	$A_i B_j$	0, $i = j$ ou i e j de mesma paridade ou n par $\frac{2i}{(i^2 - j^2)q}$, $i \neq j$ e i e j de paridades diferentes e n ímpar
6	$A_i A_j$ ($i \neq j$)	0
7	$B_i B_j$ ($i \neq j$)	0
8	A_i^3	0, i par ou n par $\frac{4}{3iq}$, i e n ímpares
Continua		

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
9	B_i^3	0
10	$A_i^2 B_j$	0, $2i \neq j$ $-\frac{\ell}{4}$, $2i = j$
11	$A_i B_j^2$	0, i par ou n par $\frac{2}{3iq}$, $i = j$, i e n ímpares $\frac{2(i^2 - 2j^2)}{i(i^2 - 4j^2)q}$, $i \neq j$, i e n ímpares

Continua

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
12	$A_i A_j^2$ ($i \neq j$)	0, i par ou n par $-\frac{4j^2}{i(i^2 - 4j^2)q}$, i e n ímpares
13	$B_i B_j^2$ ($i \neq j$)	0, $i \neq 2j$ $\frac{\ell}{4}$, $i = 2j$
14	$A_i A_j A_m$ ($i \neq j \neq m \neq i$)	$\frac{1}{2} \int (B_{i-j} A_m - B_{i+j} A_m)$, conforme integral nº 5
15	$B_i B_j B_m$ ($i \neq j \neq m \neq i$)	$\frac{1}{2} \int (B_{i-j} B_m + B_{i+j} B_m)$, conforme integrais nº 4 ou nº 7

Continua

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
16	$A_i B_j B_m$ ($j \neq m$)	$\frac{1}{2} \int (A_i B_{j-m} + A_i B_{j+m}),$ conforme integral nº 5
17	$A_i A_j B_m$ $i \neq j$	$\frac{1}{2} \int (B_{i-j} B_m - B_{i+j} B_m),$ conforme integrais nº 4 ou nº 7
18	A_i^4	$\frac{3\ell}{8}$
19	B_i^4	$\frac{3\ell}{8}$
20	$A_i^2 A_j^2$ ($i \neq j$)	$\frac{\ell}{4}$

Continua

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^l f(\xi) d\xi$
21	$B_i^2 B_j^2$ ($i \neq j$)	$\frac{l}{4}$
22	$A_i^2 B_j^2$	$\frac{l}{4}$, $i \neq j$ $\frac{l}{8}$, $i = j$
23	$A_i B_j^3$	0, i e j ímpares ou n par $\int \frac{3}{4} A_i B_j + \int \frac{1}{4} A_i B_{3j}$, i e j de paridades diferentes e n ímpar e $i \neq j$ e $i \neq 3j$, conforme integral nº 5 $\int \frac{1}{4} A_i B_{3j}$, i e j pares e n ímpar e $i \neq 3j$, conforme integral nº 5

Continua

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
24	$A_i^3 B_j$	0, i e j ímpares ou n par
		$\int \frac{3}{4} A_i B_j - \int \frac{1}{4} A_{3i} B_j$, i e j de paridades diferentes e n ímpar e $i \neq j$ e $3i \neq j$, conforme integral nº 5
		$\int -\frac{1}{4} A_{3i} B_j$, i e j pares e n ímpar, conforme integral nº 5
25	$A_i A_j^3$ ($i \neq j$)	0, $i \neq 3j$
		$-\frac{\ell}{8}$, $i = 3j$
26	$B_i B_j^3$ ($i \neq j$)	0, $i \neq 3j$
		$\frac{\ell}{2}$, $i = 3j$

Continua

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
27	$A_i^2 A_j A_m$ $i \neq j \neq m \neq i$	$-\frac{1}{4} \int (B_{j-m} B_{2i} - B_{j+m} B_{2i}) = -\frac{1}{2} \int A_j A_m B_{2i}$, conforme integração nº 17 $-\frac{\ell}{8}$, $2i = j - m$ <u>ou</u> $2i = j + m$
28	$A_i A_j A_m A_k$ $i \neq j \neq m \neq k \neq i$	$\frac{1}{4} \int (B_{i-j} B_{m-k} - B_{i+j} B_{m+k} - B_{i-j} B_{m+k} + B_{i+j} B_{m+k})$, conforme integrais no 4 ou nº 7
29	$A_i A_j A_m B_k$ $i \neq j \neq m \neq i$	$\frac{1}{4} \int (A_{m+k} B_{i-j} - A_{m-k} B_{i+j} + A_{m+k} B_{i-j} - A_{m+k} B_{i+j})$, conforme integral nº 5 $\frac{1}{4} \int (A_{2m} B_{i-j} - A_{2m} B_{i+j})$, $k = m$ e i e j de paridades diferentes, conforme integral nº 5 0, i e j de mesma paridade

Continua

Tabela A.1 - Integrações em ξ

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
30	$A_i A_j B_m B_k$ ($i \neq j$ e $m \neq k$)	$0, i = m \text{ e } j = k$ $\frac{1}{4} \int (B_{i-j} B_{i+k} - B_{i+j} B_{i-k}), i = m \text{ e } j \neq k, \text{ conforme integrais nº 4 ou nº 7}$ $\frac{1}{4} \int (B_{i-j} B_{m-k} - B_{i+j} B_{m-k} + B_{i-j} B_{m+k} - B_{i+k} B_{m+k}), \text{ conforme integrais nº 4 ou nº 7}$
31	$A_i B_j B_m B_k$ ($j \neq m \neq k \neq j$)	$\frac{1}{4} \int (A_{i-j} B_{m-k} + A_{i+j} B_{m-k} + A_{i-j} B_{m+k} + A_{i+j} B_{m+k}), \text{ conforme integral nº 5}$
32	$A_i^2 A_j B_m$ ($i \neq j$)	$\frac{1}{2} \int (A_j B_m - A_j B_{2i} B_m) = \frac{1}{2} \int (A_j B_m) - \frac{1}{4} \int (A_j B_{2i-m} + A_j B_{2i+m}), \text{ conforme integrais nº 5 ou nº 16}$

Continua

Continuação da Tabela A.1

nº	$f(\xi)$	$\int_0^{\ell} f(\xi) d\xi$
33	$A_i^2 B_j B_m$ ($j \neq m$)	$0, m \neq 2i \text{ e } j \neq 2i$ $-\frac{\ell}{8}, m = 2i \text{ ou } j = 2i$
34	$A_i A_j B_m^2$ ($i \neq j$)	$0, i \text{ e } j \text{ de mesma paridade e } n \text{ ímpar ou } n \text{ par}$ $\frac{1}{4} \int (A_i B_{j-2m} + A_i B_{j+2m}) = \frac{1}{2} \int A_i B_j B_{2m}, \text{ conforme integral nº 16}$
35	$A_i B_j^2 B_m$ ($j \neq m$)	$0, i \text{ e } m \text{ de mesma paridade e } n \text{ ímpar ou } n \text{ par}$ $\frac{1}{2} \int (A_i B_m + A_i B_{2j} B_m), \text{ conforme integrais nº 5 e nº 16}$
36	$B_i^2 B_j B_n$ ($i \neq j \neq m \neq i$)	$\frac{1}{2} \int (B_j B_m + B_{2i} B_j B_m), \text{ conforme integrais nº 4 ou nº 7 e nº 15}$

Fim da Tabela A.1

Tabela A.2 - Integrações em θ

Notações:

$$\text{Sen } ip\theta = C_i$$

$$\text{Cos } ip\theta = D_i$$

Nas expressões seguintes, i, j, m e k são constantes inteiras positivas quaisquer, restritas se indicado, e $p\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Começo da Tabela A.1

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
1	C_i	0
2	D_i	0, i par
	$\frac{2}{ip}$, $i = 1, 5, 9, 13 \dots$	
	$\frac{-2}{ip}$, $i = 3, 7, 11, 15 \dots$	

Continua

Tabela A.2 - Integrações em θ

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
3	C_i^2	θ_0
4	D_i^2	θ_0
5	$C_i D_j$	0
6	$C_i C_j$ ($i \neq j$)	0, i e j de mesma paridade $\frac{1}{2} \int (D_{i-j} - D_{i+j})$, conforme integral nº 2
7	$D_i D_j$ ($i \neq j$)	0, i e j de mesma paridade $\frac{1}{2} \int (D_{i-j} + D_{i+j})$, conforme integral nº 2

Continua

Tabela A.2 - Integrações em θ

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
8	C_i^3	0
9	D_i^3	0, i par $\frac{4}{3ip}$, i = 1, 5, 9, 13 ... $-\frac{4}{3ip}$, i = 3, 7, 11, 15 ...
10	$C_i^2 D_i$	0, i par $\frac{2}{3ip}$, i = 1, 5, 8, 13 $-\frac{2}{3ip}$, i = 3, 7, 11, 15

Continua

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
11	$C_i^2 D_j$ ($i \neq j$)	$0, j \neq 2i \text{ e } j \text{ par}$ $-\frac{\theta_0}{2}, j = 2i$ $\frac{1}{4} \int (2D_j - D_{2i-j} - D_{2i+j}), j \text{ ímpar, conforme integral nº 2}$
12	$C_i D_j^2$	0
13	$C_i^2 C_j$ ($i \neq j$)	0

Continua

Tabela A.2 - Integrações em θ

Continuação da Tabela A.1

nº	f(θ)	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
14	$D_i^2 D_j$ (i ≠ j)	$0, j \neq 2i \text{ e } j \text{ par}$ $\frac{\theta_0}{2}, j = 2i$ $\frac{1}{2} \int (D_j + D_{2i} D_j), j \text{ ímpar, conforme integrais nº 2 e nº 7}$
15	$C_i D_j J_m$ (j ≠ m)	0
16	$C_i C_j D_m$ (i ≠ j)	$0, i \text{ e } j \text{ de mesma paridade e } m \text{ par ou } m = i \text{ e } j \text{ par}$ $\frac{\theta_0}{2}, 2m = 2i = j$ $\frac{1}{2} \int (D_{i-j} D_m - D_{i+j} D_m), \text{ conforme integral nº 7}$

Continua

Tabela A.2 - Integrações em θ

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
17	$C_i C_j C_m$ ($i \neq j \neq m \neq i$)	0
18	$D_i D_j D_m$ ($i \neq j \neq m \neq i$)	$\frac{1}{2} (D_{i-j} D_m + D_{i+j} D_m)$, conforme integral nº 2 ou nº 7
19	C_i^4	$\frac{3\theta_0}{4}$
20	D_i^4	$\frac{3\theta_0}{4}$
21	$C_i^2 C_j^2$ ($i \neq j$)	$\frac{\theta_0}{2}$

Continua

Tabela A.2 - Integrações em θ

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
22	$D_i^2 D_j^2$ ($i \neq j$)	$\frac{\theta_0}{2}$
23	$C_i^2 D_j^2$	$\frac{\theta_0}{2}$
24	$C_i^2 D_j D_m$	0, j e m de mesma paridade $\frac{1}{4} \int (D_{j-m} - D_{2i} D_{j-m} + D_{j+m} - D_{2i} D_{j+m})$, conforme integrais nº 2 e nº 7
25	$C_i D_j^2 D_m$ ($j \neq m$)	0
26	$C_i C_j^3$ ($i \neq j$)	0, i e j de mesma paridade $\frac{3}{4} \int (C_i C_j) - \frac{1}{4} \int C_i C_{3j}$, conforme integrais nº 1 ou nº 6
Continua		

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
27	$D_i D_j^3$ ($i \neq j$)	0, i e j de mesma paridade $\frac{3}{4} \int D_i D_j + \frac{1}{4} \int C_i C_{3j}$, conforme integrais nº 2 e nº 7
28	$C_i^2 C_j C_m$ ($i \neq j \neq m \neq i$)	$\frac{1}{2} \int (C_j C_m - C_j C_m D_{2i})$, conforme integrais nº 1 ou nº 6 e nº 16
29	$C_i C_j D_m^2$ ($i \neq j$)	0, i, j e m pares $\frac{1}{2} \int (C_i C_j + C_i C_j D_{2m})$, conforme integrais nº 1 ou nº 6 e nº 16
30	$D_i^2 D_j D_m$ ($i \neq j$)	$\frac{1}{2} \int (D_j D_m + D_{2i} D_j D_m)$, conforme integrais nº 2 ou nº 7 e nº 18

Continua

Tabela A.2 - Integrações em θ

Continuação da Tabela A.2

nº	$f(\theta)$	$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$
31	$C_i C_j D_m M_k$ $0, i = m \text{ e } j = k$ $(i \neq j \text{ e } m \neq k)$	$\frac{1}{4} \int (D_{i-j} D_{m-k} - D_{i+j} D_{m-k} + D_{i-j} D_{m+k} - D_{i+j} D_{m+k}), \text{ conforme integrais nº 2 ou nº 7}$
Fim da Tabela A.2		

Tabela A.3 - Integrações em ζ

nº	$z(\zeta)$	$\int_{-\gamma}^{\gamma} z(\zeta) d\zeta$
1	ζ^2	$2\gamma^3/3$
2	ζ^4	$2\gamma^5/5$
3	$(\zeta-\epsilon)$	$-2\epsilon\gamma$
4	$(\zeta-\epsilon)^2$	$2\gamma^3/3 + 2\epsilon^2\gamma$
5	$(\zeta-\epsilon)^3$	$-2\epsilon\gamma^3 - 2\epsilon^3\gamma$
6	$(\zeta-\epsilon)^4$	$2\gamma^5/5 + 4\epsilon^2\gamma^3 + 2\epsilon^4\gamma$
7	$(1+\zeta-\epsilon)$	$2\gamma(1-\epsilon)$
8	$(1+\zeta-\epsilon)^2$	$2\gamma \left[(1-\epsilon)^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right]$
9	$(1+\zeta-\epsilon)(\zeta-\epsilon)$	$\frac{2\gamma^3}{3} + 2\gamma\epsilon(\epsilon-1)$

APÊNDICE B

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

B.1. ALGORÍTMO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

A pesquisa da estabilidade estrutural, como desenvolvida aqui, através de Análise Modal, se resume, sob o ponto de vista computacional, na resolução do sistema de equações de equilíbrio, algébricas e não-lineares, dadas por (V.24) a (V.32). Esta solução ponto a ponto representa o caminho de equilíbrio pós-crítico da casca cilíndrica enrijecida, sob compressão axial.

O sistema de equações (V.23), reescrito da forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^*}{\partial u_2} &= f_1 (u_2, u_3, v_2, v_5, w_2, w_3, w_5, w_6, w_7, \lambda) = 0 \\
\frac{\partial V^*}{\partial u_3} &= f_2 (u_2, u_3, v_2, v_5, w_2, w_3, w_5, w_6, w_7, \lambda) = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{\partial V^*}{\partial w_7} &= f_8 (u_2, u_3, v_2, v_5, w_2, w_3, w_5, w_6, w_7, \lambda) = 0 ,
\end{aligned}
\tag{B.1}$$

é resolvido para determinados valores de λ , o que corresponderia a um **controle de carga**, ou para determinados valores da amplitude mais significativa, w_2 , caracterizando um **controle de deslocamento**. A técnica adotada de solução numérica para essas equações não-lineares é a incremental-iterativa, via método de Newton-Raphson.

B.1.1. APLICAÇÃO DO ALGORÍTMO DE NEWTON-RAPHSON PARA O CONTROLE DO PARÂMETRO DE CARGA

Tendo-se $\lambda = \bar{\lambda}$ como parâmetro, a totalidade dos argumentos de (B.1) pode ser considerada como um vetor \underline{X} , tal que

$$\underline{X} \equiv \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8; x_9\}^T \quad \text{ou}$$

$$\underline{X} \equiv \{u_2; u_3; v_2; v_5; w_2; w_3; w_5; w_6; w_7\}^T ,$$

(B.2)

e as funções que fornecem as equações de equilíbrio, como elementos f_i de um vetor função,

$$\underline{F} \equiv \{f_1; f_2; f_3; f_4; f_5; f_6; f_7; f_8; f_9\}^T, \quad (B.3)$$

permitindo, assim, a representação de qualquer uma destas equações, genericamente, por

$$\frac{\partial V^*}{\partial x_i} = f_i = 0 \quad (B.4)$$

e, o próprio sistema, na forma vetorial

$$\underline{F}(\underline{X}) = 0 \quad ; \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad (B.5)$$

para aplicação do método de aproximações sucessivas de Newton-Raphson.

Seja, então,

$$\underline{X}^{(m)} \equiv \{u_2^{(m)}; u_3^{(m)}; v_2^{(m)}; v_5^{(m)}; w_2^{(m)}; w_3^{(m)}; w_5^{(m)}; w_6^{(m)}; w_7^{(m)}\}^T \quad (B.6)$$

uma m-ésima aproximação da solução de (B.5) quando se torna $\lambda = \bar{\lambda}$ como parâmetro de controle (PC).

Sejam, ainda,

$$\underline{F}(\underline{X}^{(m)}) \equiv \{f_1^{(m)}; f_2^{(m)}; \dots; f_9^{(m)}\}^T, \quad (B.7)$$

o vetor função aplicado nesta aproximação $\underline{X}^{(m)}$, e

$$\underline{J}^{(m)} = \underline{J}(\underline{X}^{(m)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial w_6} & \frac{\partial f_1}{\partial w_7} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial w_6} & \frac{\partial f_2}{\partial w_7} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_9}{\partial u_2} & \frac{\partial f_9}{\partial u_3} & \frac{\partial f_9}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial f_9}{\partial w_6} & \frac{\partial f_9}{\partial w_7} \end{bmatrix}^{(m)} = \quad (B.8a)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3 \partial u_2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial u_2} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial u_2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial u_3} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3^2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial u_3} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial u_3} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial u_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial w_7} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3 \partial w_7} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial w_7} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial w_7} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7^2} \end{bmatrix}^{(m)} \quad (B.8b)$$

a matriz Jacobiana de (B.5), com respeito às variáveis que compõe \underline{X} , também aplicada em $\underline{X}^{(m)}$:

Sendo $\underline{J}^{(m)}$ uma matriz não singular e $\underline{J}^{-1}(\underline{X}^{(m)})$ a sua inversa, o erro cometido na aproximação $\underline{X}^{(m)}$ da solução \underline{X} é dado pelo vetor

$$\underline{\varepsilon}^{(m)} = \underline{X}^{(m)} - \underline{X} = - \underline{J}^{-1}(\underline{X}^{(m)}) \underline{F}(\underline{X}^{(m)}), \quad (B.9)$$

e, assim, estabelecida a Fórmula de Recorrência de Newton-Raphson:

$$\underline{x}^{(m)} = \underline{x}^{(m-1)} - \underline{J}^{-1}(\underline{x}^{(m-1)}) \underline{F}(\underline{x}^{(m-1)}) . \quad (\text{B.10})$$

Esta fórmula conduz ao fluxo de processamento apresentado na figura (B.1), onde se verifica que a solução de (B.5), para um determinado PC $\bar{\lambda}$, serão os argumentos de uma última aproximação do vetor \underline{x} , dentro de uma determinada tolerância $\underline{\epsilon}$.

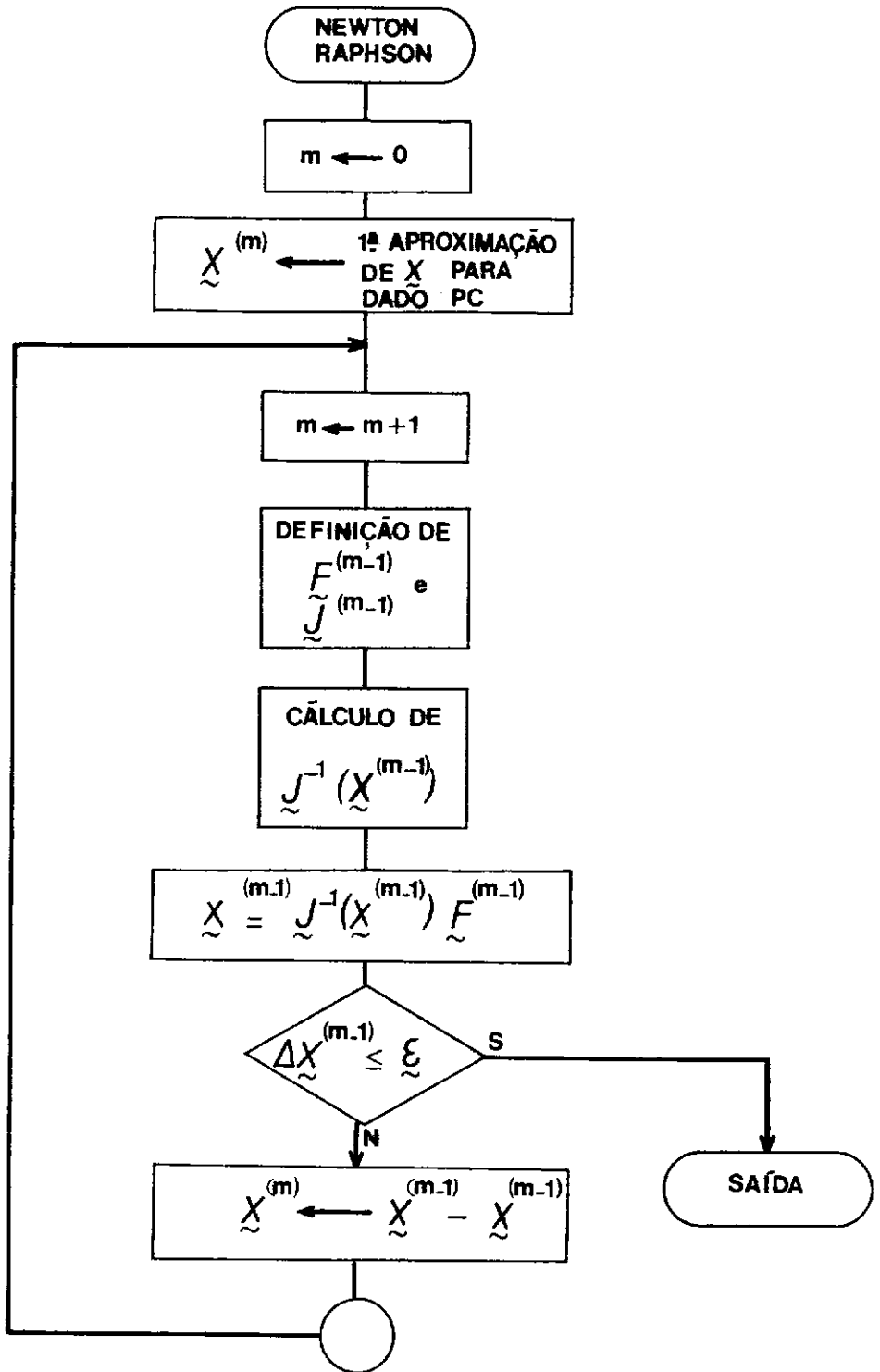


FIGURA B.1 – FLUXO PARA PROCESSAMENTO DO ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON

B.1.2. APLICAÇÃO DO ALGORÍTMO DE NEWTON-RAPHSON PARA O CONTROLE DE DESLOCAMENTOS

Considerando-se o mesmo sistema (B.1), tomando-se, agora, como parâmetro de controle $PC = w_2 = \bar{w}_2$, o vetor solução referenciado ao novo conjunto de argumentos fica sendo dado por

$$\underline{X} \equiv \{u_2; u_3; v_2; v_5; \lambda; w_3; w_5; w_6; w_7\}^T \quad (B.11)$$

e o sistema (B.5), escrito da forma

$$\underline{F}(\underline{X}) = 0 \quad ; \quad w_2 = \bar{w}_2 \quad . \quad (B.12)$$

Em sendo assim, analogamente ao exposto no item anterior, obtêm-se para um m^{ésima} aproximação de \underline{X} o vetor

$$\underline{X}^{(m)} \equiv \{u_2^{(m)}; u_3^{(m)}; v_2^{(m)}; v_5^{(m)}; \lambda^{(m)}; w_3^{(m)}; w_5^{(m)}; w_6^{(m)}; w_7^{(m)}\}^T \quad (B.13)$$

e a respectiva matriz Jacobiana

$$\underline{J}^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3 \partial u_2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial u_2} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_2} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial u_3} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3^2} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial u_3} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_3} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial u_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2 \partial w_7} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3 \partial w_7} & \frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial w_7} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_2} & \dots & \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7^2} \end{bmatrix}^{(m)} \quad (B.14)$$

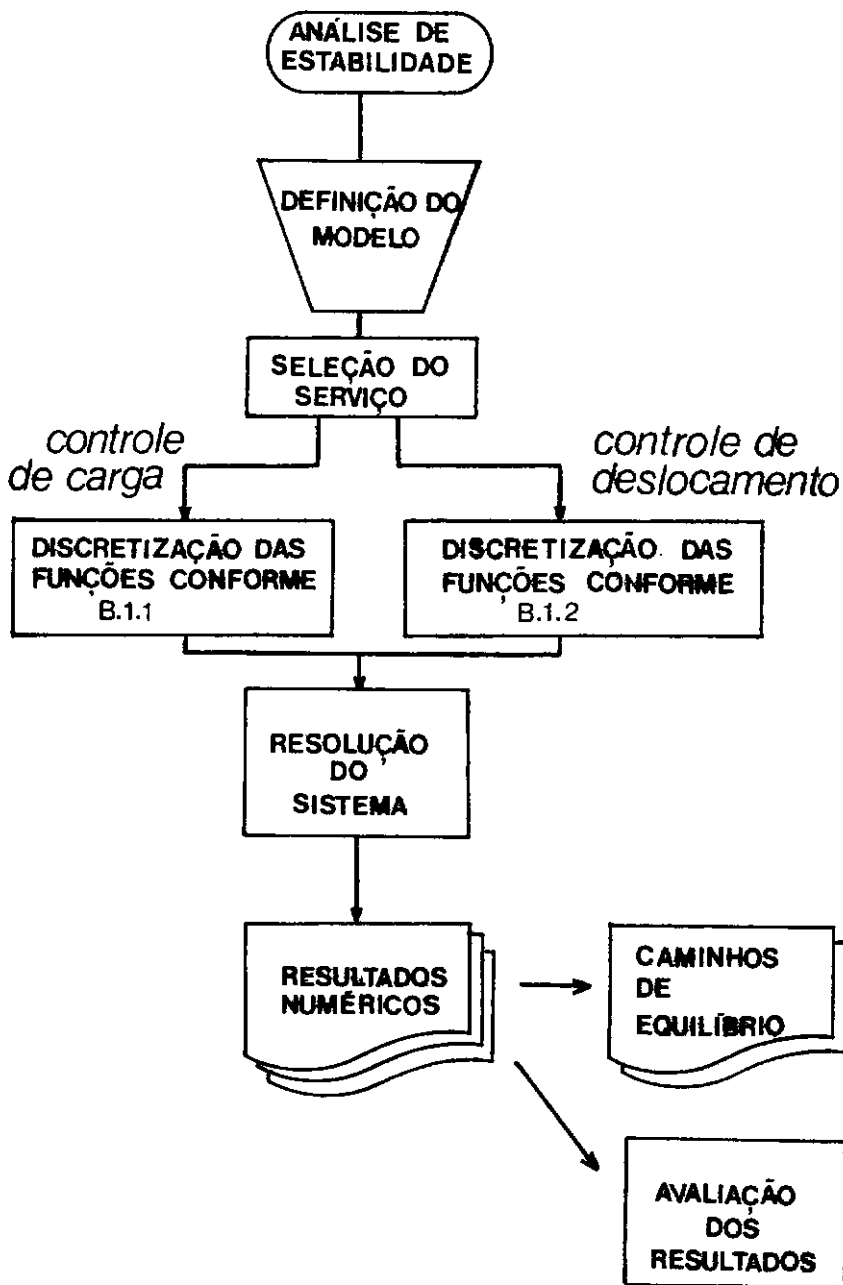
A resolução numérica de (B.12) se dá pela mesma Fórmula de Recorrência (B.10) e pelo algoritmo descrito na figura (B.1), atendendo-se às devidas alterações impostas pela mudança do parâmetro de controle.

B.2. METODOLOGIA DE PROCESSAMENTO

Visto que a expressão numérica do comportamento do modelo estrutural adotado é definida pela resolução do sistema (B.1), tanto pelo controle do parâmetro de carga, quanto pelo controle de deslocamentos, sugere-se um único programa FORTRAN para aplicação do método numérico adotado.

A este programa caberia, exclusivamente, a seleção do serviço a ser executado, com a preparação das primeiras aproximações do vetor \underline{X} e definição do parâmetro de controle PC, concentrando-se em subrotinas isoladas as rotinas específicas e/ou comuns às diversas etapas de processamento.

A metodologia do serviço é genericamente apresentada no fluxo da figura (B.2). Uma possível estruturação deste programa, incluindo a definição de suas principais variáveis e subrotinas, é realizada nos itens seguintes.

**FIGURA B.2 – FLUXO GERAL DO SERVIÇO**

B.2.1. VARIÁVEIS PRINCIPAIS

As principais variáveis do sistema são propostas pelas tabelas abaixo apresentadas, sendo as variáveis reais de dupla precisão do tipo R e, as inteiras de precisão simples do tipo I.

Tabela B.1 - Parâmetros a serem fornecidos

Nome da variável	Tipo	Significado e/ou finalidade
RGP1	R	Relação geométrica do painel h_p/R
RGP2	R	Relação geométrica do painel $L/R = \ell$
RGS	R	Relação geométrica do enrijecedor C/h_s
ETA	R	Relação geométrica $h_s/h_p = \eta$
CP	R	Coefficiente de Poisson ν
N	I	Número de semi-ondas longitudinais (nº ímpar n)
P	I	Número de ondas circunferenciais
FASE	I	Indicadores do controle a ser processado: FASE=1 PC=carga FASE=2 PC=deslocamento

Tabela B.2 - Parâmetros a serem gerados internamente

Nome da variável	Tipo	Significado e/ou finalidade
PI	R	Constante π
EXCEN	R	Excentricidade adimensional do enrijecedor ϵ
Q	R	Argumento $q = n\pi/\ell$
NENRJ	I	Número de enrijecedores
BETAØ	R	Semi-ângulo entre enrijecedores θ_0
ALFA	R	Parâmetro adimensional $h_p^2/12 R^2$
GAMA	R	Parâmetro adimensional $C/R = \gamma$
CARCR	R	Parâmetro de carga crítica

Tabela B.3 - Demais variáveis notáveis

Nome da variável	Tipo	Significado e/ou finalidade
C(139)	R	Vetor para armazenamento dos valores dos coeficientes constantes nas equações de equilíbrio e nas expressões dos elementos da matriz Jacobiana
X(9)	R	Vetor contendo a aproximação das variáveis de estado
J(10,10)	R	Matriz de armazenamento dos valores dos elementos da matriz Jacobiana e das equações de equilíbrio para a aproximação X
DETJ	R	Valor do determinante de J
PC	R	Valor do parâmetro de controle
DP	R	Valor do incremento a ser dado ao PC
NE	I	Número de equações do sistema
NI	I	Número de iterações realizados na solução do sistema para o PC e X fornecidos
MAT(30,10)	R	Matriz de armazenamento dos resultados, para fins de impressão
NIV(30)	I	Vetor de armazenamento das iterações realizados por vez, para fins de impressão

B.2.2. SUBROTINAS

O sistema contaria com seis subrotinas para execução das principais etapas de cálculo, as quais tem suas metodologias e objetivos abordados abaixo.

Subrotina CALC1

Subrotina a ser chamada pelo programa principal, após a definição dos parâmetros constantes nas tabelas B.1 e B.2, para

cálculo explícito de todos os elementos do vetor C que independem do parâmetro de carga λ ou da "FASE" de execução, ou seja, dos coeficientes das funções de trabalho não alteráveis no processamento de uma específica geometria de casca.

Subrotina RESOL

Subrotina chamada pelo programa principal para execução do algoritmo de Newton-Raphson, para um determinado vetor X e um determinado parâmetro de controle PC.

Conforme a "FASE" em processamento, estas variáveis seriam assim fornecidas:

. FASE=1 - Controle de Carga

X_i , $i=1;NE$, assumindo a última aproximação das amplitudes de flambagem;

PC assumindo o valor do parâmetro de carga para o qual o sistema será processado.

. FASE=2 - Controle de Deslocamentos

X_i , $i=1;NE-1$, assumindo a última aproximação das amplitudes de flambagem;

$X(NE)$ assumindo a última aproximação do parâmetro de carga;

PC assumindo o valor de amplitude w_2 para a qual o sistema será processado.

Definido, então, em ambos os casos, o novo parâmetro de carga, esta subrotina se encarregaria de chamar as demais subrotinas do sistema para que se processem os cálculos dos restan

tes elementos de C , da matriz Jacobiana, de seu determinante e de sua inversa. Finalmente, seria aplicado o algoritmo de Newton-Raphson em todos estes elementos até se obter a convergência para uma nova solução aproximada.

O número de iterações a serem realizadas ficaria limitado a um valor pré-fixado e, caso a convergência não ocorra dentro deste limite, seria enviada uma mensagem de alerta encerrando o processamento.

Subrotina CALC2

Definiria explicitamente os elementos do vetor C cujos valores seriam alterados a cada novo parâmetro de carga.

Subrotinas FUNC1 e FUNC2

Definiriam explicitamente as funções de trabalho J , matriz Jacobiana do sistema, e o vetor de funções F , conforme estabelecido no item B.1, para as aproximações das variáveis de estado e o parâmetro de controle em questão.

Os valores dessas funções seriam alocados na matriz J conforme esquematicamente mostrado na figura (B.3).

Subrotina SIMUL

Subrotina a ser utilizada para cálculo do determinante de J e sua inversa. As expressões dos elementos da matriz Jacobiana são fornecidos no Apêndice C.

MATRIZ JACOBIANA \tilde{J}

VETOR FUNÇÃO \tilde{F}

J_{11}	J_{12}	J_{13}	...	J_{19}	f_1
J_{21}	J_{22}	J_{23}	...	J_{29}	f_2
J_{31}	J_{32}	J_{33}	...	J_{39}	f_3
...
J_{91}	J_{92}	J_{93}	...	J_{99}	f_9

$J_{10 \times 10}$

FIGURA B.3 - ESQUEMA DE ARMAZENAMENTO DE \tilde{J} E \tilde{F}

APÊNDICE C

EXPRESSÕES DOS ELEMENTOS DA MATRIZ JACOBIANA

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial u_2}$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial u_2^2} = - \frac{1}{2} \ell \theta_0 [(\nu-1) p^2 - 2q^2]$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3 \partial u_2} = \frac{32}{3} \frac{q}{p}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial u_2} = - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p q (\nu+1)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_5 \partial u_2} = - \frac{8}{9} (9\nu-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial u_2} = & - \nu \ell \theta_0 q - \frac{8}{9p} [(3\nu-1) p^2 + 2q^2] w_2 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q [(\nu-1) p^2 + 2q^2] w_3 + \\ & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q (p^2 + q^2) w_5 - \frac{3}{2} \ell \theta_0 p^2 q (3\nu-1) w_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_3 \partial u_2} &= \frac{8\nu}{3p} + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q [(\nu-1) p^2 + 2q^2] w_2 - \frac{256q^2}{15p} w_3 + \\ &+ \frac{64}{45p} [(\nu-1) p^2 - 4q^2] w_5 - \frac{256}{225p} [(\nu-1) p^2 - q^2] w_6 + \\ &+ \frac{256}{315p} [23(\nu-1) p^2 + 4q^2] w_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial u_2} &= \frac{8\nu}{9p} + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q (p^2 + q^2) w_2 + \frac{64}{45p} [(\nu-1) p^2 - 4q^2] w_3 - \\ &- \frac{128}{225p} [(15\nu-1) p^2 + 14q^2] w_5 - \frac{64}{1575p} [(81\nu+31) p^2 + 76q^2] w_6 - \\ &- \frac{512}{4725p} [(5\nu-51) p^2 - 42q^2] w_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial u_2} &= - \frac{8\nu}{45p} - \frac{256}{225p} [(\nu-1) p^2 - q^2] w_3 - \\ &- \frac{64}{1575p} [(81\nu+31) p^2 + 76q^2] w_5 - \frac{256}{945p} [2(57\nu-1) p^2 + 31q^2] w_6 + \\ &+ \frac{256}{11025p} [(681\nu-185) p^2 + 76q^2] w_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial u_2} = & - \frac{352\nu}{45p} - \frac{3}{2} \ell \theta_0 p^2 q (3\nu-1) w_2 + \frac{256}{315p} [23(\nu-1) p^2 + 4q^2] w_3 - \\ & - \frac{512}{4725p} [(5\nu-51) p^2 - 42q^2] w_5 + \frac{256}{11025p} [(681\nu-185) p^2 + 76q^2] w_6 - \\ & - \frac{2048}{4725p} [(375\nu-17) p^2 + 70q^2] w_7 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_2} = 0$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_j \partial u_3}$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial u_3^2} = 24 \ell \theta_0 q^2 + 24 \eta \gamma \ell q^2$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2 \partial u_3} = - \frac{64}{3} \nu + \eta \gamma \ell \{- 2q^3 v_2 - 6\varepsilon p q^3 w_2\}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_5 \partial u_3} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial u_3} = & - \frac{64}{3} \frac{\nu}{p} - \ell \theta_0 q (3\nu p^2 + q^2) w_2 + \frac{256}{15} \frac{q^2}{p} w_3 + \\ & + \frac{256}{45p} (3\nu p^2 + q^2) w_5 - \frac{256}{225p} (12\nu p^2 + q^2) w_6 - \end{aligned}$$

$$- \frac{64}{315p} (413vp^2 + 16q^2) w_7 + \eta\gamma\ell \left\{ -6\varepsilon pq^3 v_2 - \right. \\ \left. - 2p^2q \left[\left(\varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + 3v \right] w_2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_3 \partial u_3} = 4v \ell \theta_0 q + \frac{256q^2}{15p} w_2 - 16 \ell \theta_0 q^3 w_3 - 4 \eta\gamma\ell q (4\varepsilon q^2 - v)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial u_3} = \frac{256}{45p} (3vp^2 + q^2) w_2 - 8 \ell \theta_0 q (vp^2 + q^2) w_5 + \\ + 4 \ell \theta_0 q (7vp^2 + 2q^2) w_7 + 4 \eta\gamma\ell q (4\varepsilon q^2 - v)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial u_3} = - \frac{256}{225p} (12vp^2 + q^2) w_2 - 8 \ell \theta_0 q (4vp^2 + q^2) w_6 - 4 \eta\gamma\ell q (4\varepsilon q^2 - v)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial u_3} = - \frac{64}{315p} (413vp^2 + 16q^2) w_2 + 4 \ell \theta_0 q (7vp^2 + 2q^2) w_5 - \\ - 8 \ell \theta_0 q (19vp^2 + 4q^2) w_7 + 24 \eta\gamma\ell v q$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial u_3} = 0$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial v_2}$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_2^2} = \frac{1}{2} \ell \theta_0 [2p^2 - (\nu+1) q^2] + \eta \gamma \ell \left\{ -2q^2 (\lambda - \eta^2 \alpha q^2) - 2q^3 u_3 + \right.$$

$$+ q^2 (\nu - 4\epsilon q^2) (w_3 - w_5 + w_6) - 6\nu q^2 w_7 - \frac{9}{2} \epsilon p q^4 v_2 w_2 +$$

$$\left. + \frac{9}{4} q^4 v_2^2 + \frac{1}{4} p^2 q^2 [3q^2 (3\epsilon^2 + \gamma^2) + 1] w_2^2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_5 \partial v_2} = - \frac{32}{9pq} [2p^2 - (\nu-1) q^2]$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial v_2} = \ell \theta_0 p + \frac{8}{9q} [2p^2 + (3\nu-1) q^2] w_2 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p q^2 (3\nu-1) w_3 -$$

$$- \frac{1}{2} \ell \theta_0 p (p^2 + q^2) w_5 + \frac{3}{2} \ell \theta_0 p [2p^2 + (\nu-1) q^2] w_7 +$$

$$+ \eta \gamma \ell \left\{ 2\epsilon p q^2 (\lambda - \eta^2 \alpha q^2) - 6\epsilon p q^3 u_3 - \frac{9}{4} \epsilon p q^4 v_2^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} p^2 q^2 [3q^2 (3\epsilon^2 + \gamma^2) + 1] v_2 w_2 + p q^2 \left[4q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \right.$$

$$\left. + \epsilon(1-2\nu) \right] (w_3 - w_5 + w_6) + 6\nu \epsilon p q^2 w_7 - \frac{3}{4} \epsilon p^3 q^2 [3q^2 (\epsilon^2 + \gamma^2) + 1] w_2^2 \left. \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_3 \partial v_2} = & -\frac{8}{3q} - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p q^2 (3v-1) w_2 + \frac{256q}{15} v w_3 + \frac{64}{45} q (3v+1) w_5 - \\ & - \frac{256q}{225} w_6 + \frac{256q}{315} (19v-23) w_7 + \eta \gamma \ell \left\{ q^2 (v-4\epsilon q^2) v_2 + \right. \\ & \left. + p q^2 \left[4q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \epsilon(1-2v) \right] w_2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial v_2} = & -\frac{8}{9q} - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p (p^2+q^2) w_2 + \frac{64}{45} q (3v+1) w_3 + \\ & + \frac{128}{225q} [14p^2 + (15v-1) q^2] w_5 + \frac{64}{1575q} [112p^2 + (45v+31) q^2] w_6 - \\ & - \frac{512}{1575q} [62p^2 - (3v-17) q^2] w_7 - \eta \gamma \ell \left\{ q^2 (v-4\epsilon q^2) v_2 + \right. \\ & \left. + p q^2 \left[4q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \epsilon(1-2v) \right] w_2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial v_2} = & \frac{8}{45q} - \frac{256q}{225} w_3 + \frac{64}{1575q} [112p^2 + (45v+31) q^2] w_5 + \\ & + \frac{256}{945q} [112p^2 + (33v-2) q^2] w_6 - \frac{256}{11025q} [496p^2 + \\ & + (261v-185) q^2] w_7 + \eta \gamma \ell \left\{ q^2 (v-4\epsilon q^2) v_2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ pq^2 \left[4q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \epsilon(1-2\nu) \right] w_2 \Bigg\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial v_2} &= \frac{352}{45q} + \frac{3}{2} \ell \theta_0 p [2p^2 + (\nu-1) q^2] w_2 + \frac{256q}{315} (19\nu-23) w_3 - \\ &- \frac{512}{1575q} [62p^2 - (3\nu-17) q^2] w_5 - \\ &- \frac{256}{11025q} [496p^2 + (261\nu-185) q^2] w_6 + \\ &+ \frac{1024}{4725q} [311p^2 + 2(87\nu-17) q^2] w_7 + \eta \gamma \ell \{-6\nu q^2 v_2 + 6\nu \epsilon pq^2 w_2\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial v_2} = \eta \gamma \ell \{-2q^2 v_2 + 2\epsilon pq^2 w_2\}$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial v_5}$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial v_5^2} = 2 \ell \theta_0 [6p^2 - (\nu-1) q^2]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2 \partial v_5} &= -\frac{64}{9q} + \frac{1}{2} \ell \theta_0 p [3p^2 - (2\nu-1) q^2] w_2 + \frac{256}{45} (2\nu-1) q w_3 - \\ &- \frac{256}{225q} [3p^2 - (5\nu+2) q^2] w_5 + \frac{64}{1575q} [528p^2 - (129\nu-68) q^2] w_6 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1024}{1575q} [27p^2 - (29\nu-22) q^2] w_7$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_3 \partial v_5} = \frac{256}{45} q (2\nu-1) w_2 - 8\nu \ell\theta_0 pq^2 w_5 - 2\nu \ell\theta_0 pq^2 w_6 +$$

$$+ \ell\theta_0 pq^2 (19\nu-10) w_7$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial v_5} = 2 \ell\theta_0 p - \frac{256}{225q} [3p^2 - (5\nu+2) q^2] w_2 - 8\nu \ell\theta_0 pq^2 w_3 -$$

$$- 8 \ell\theta_0 p^3 w_6$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial v_5} = \frac{64}{1575q} [528p^2 - (129\nu-68) q^2] w_2 - 2\nu \ell\theta_0 pq^2 w_3 -$$

$$- 8 \ell\theta_0 p^3 w_5 + \ell\theta_0 p [24p^2 + (3\nu+1) q^2] w_7$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial v_5} = - 12 \ell\theta_0 p + \frac{1024}{1575q} [27p^2 - (29\nu-22) q^2] w_2 +$$

$$+ \ell\theta_0 pq^2 (19\nu-10) w_3 + \ell\theta_0 p [24p^2 + (3\nu+1) q^2] w_6$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial v_5} = 0$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial w_2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_2^2} &= \ell \theta_0 [1 - \lambda q^2 + \alpha(q^2 + p^2)^2] - \frac{8}{9p} [(3\nu - 1) p^2 + 2q^2] u_2 - \\
 &- \ell \theta_0 q (3\nu p^2 + q^2) u_3 + \frac{8}{9q} [2p^2 + (3\nu - 1) q^2] v_2 + \\
 &+ \frac{1}{2} \ell \theta_0 p [3p^2 - (2\nu - 1) q^2] v_5 + \frac{16}{3pq} (p^2 + \nu q^2) w_2 - \\
 &- \frac{1}{2} \ell \theta_0 (p^2 + 4\nu q^2) w_3 - \frac{3}{4} \ell \theta_0 (p^2 + \nu q^2) w_5 + \\
 &+ \frac{3}{2} \ell \theta_0 (3p^2 + \nu q^2) w_7 + \frac{27}{32} \ell \theta_0 (p^4 + q^4) w_2^2 + \\
 &+ \frac{64q}{15p} (p^2 - 3q^2) w_2 w_3 - \frac{64}{75pq} [9(p^4 + q^4) + 4p^2 q^2] w_2 w_5 - \\
 &- \frac{64}{3675pq} [9(84p^4 + 7q^4) - 59p^2 q^2] w_2 w_6 + \\
 &+ \frac{64}{525pq} [108(3p^4 - q^4) + 119p^2 q^2] w_2 w_7 + \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_3^2 - \\
 &- \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 3q^2) w_3 w_5 - 4 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_3 w_7 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(p^4 + q^4) + 2p^2 q^2] w_5^2 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2p^2 q^2] w_5 w_6 - \\
& - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 - 5q^2) w_5 w_7 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_6^2 + \\
& + \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_6 w_7 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(19p^4 + 4q^4) + 23p^2 q^2] w_7^2 + \\
& + n\gamma \ell \left\{ - 2p^2 q \left[\left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + 3v \right] u_3 - \right. \\
& - pq^2 \left[2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) (\lambda - n^2 \alpha q^2) - 4n^2 \alpha (1 - v) \right] + \\
& + \frac{1}{4} p^2 q^2 \left[9 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + 1 \right] v_2^2 - \\
& - 3\epsilon p^3 q^2 \left[\frac{3}{2} (\epsilon^2 + \gamma^2) q^2 + 1 \right] v_2 w_2 - \left\{ - p^2 [1 + 4\epsilon(\epsilon^2 - \gamma^2) q^4] + \right. \\
& + pq^2 \left[\epsilon(4v + 3v\epsilon - 2\epsilon) + \gamma^2 \left(v - \frac{2}{3} \right) \right] \left. \right\} (w_3 - w_5 + w_6) - \\
& - 6 p^2 \left[v q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + 1 \right] w_7 + \\
& + \frac{3}{4} p^4 \left[3 p^2 + 3 q^4 \left(\frac{\gamma^4}{5} + 2\epsilon^2 \gamma^2 + \epsilon^4 \right) + 2 q^2 \left(\frac{\gamma^2}{3} + \epsilon^2 \right) \right] w_2^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \nu^*}{\partial w_3 \partial w_2} = & -\frac{8}{3pq} [1-4\lambda q^2 + 4\alpha q^4] + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q [(\nu-1) p^2 + 2q^2] u_2 + \\
& + \frac{256q^2}{15p} u_3 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p q^2 (3\nu-1) v_2 + \frac{256q}{45} (2\nu-1) v_5 - \\
& - \frac{1}{2} \ell \theta_0 (p^2+4\nu q^2) w_2 + \frac{64q}{5p} \nu w_3 + \frac{32}{15pq} (21p^2+2\nu q^2) w_5 - \\
& - \frac{64}{225pq} (14p^2+3\nu q^2) w_6 - \frac{16}{315pq} (248p^2+343\nu q^2) w_7 + \\
& + \frac{32q}{15p} (p^2-3q^2) w_2^2 + 2 \ell \theta_0 q^2 (p^2+3q^2) w_2 w_3 - \\
& - \ell \theta_0 q^2 (p^2-3q^2) w_2 w_5 - 4 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_2 w_7 - \frac{768q}{35p} w_3^2 - \\
& - \frac{1024q}{315p} (p^2+15q^2) w_3 w_5 + \frac{1024q}{1575p} (4p^2+9q^2) w_3 w_6 + \\
& + \frac{1024q}{315p} (21p^2-4q^2) w_3 w_7 + \frac{512q}{175p} (p^2-5q^2) w_5^2 - \\
& - \frac{1024q}{3675p} (25p^2+57q^2) w_5 w_6 - \frac{128q}{14175p} (3697p^2+2016q^2) w_5 w_7 + \\
& + \frac{512q}{6615p} (184p^2-279q^2) w_6^2 + \frac{128q}{99225p} (4933p^2-5472q^2) w_6 w_7 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{256q}{51975p} (15197p^2 + 12768q^2) w_7^2 + \eta\gamma\ell \left\{ pq^2 \left[4 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \epsilon(1-2\nu) \right] v_2 + p^2 \left\{ -1 - 4\epsilon q^4 (\epsilon^2 + \gamma^2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2q^2 \left[\epsilon \left(2\nu + \frac{3}{2} \nu\epsilon - \epsilon \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} w_2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial w_2} = - \frac{8}{9pq} \{ 1 - 4\lambda q^2 + 4\alpha[p^4 + q^4 - 2(3\nu - 4)p^2q^2] \} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ell\theta_0 q (p^2 + q^2) u_2 - \frac{256}{45p} (3\nu p^2 + q^2) u_3 -$$

$$- \frac{1}{2} \ell\theta_0 p (p^2 + q^2) v_2 - \frac{256}{225q} [3p^2 - (5\nu + 2)q^2] v_5 -$$

$$- \frac{3}{4} \ell\theta_0 (p^2 + \nu q^2) w_2 + \frac{32}{15pq} (21p^2 + 2\nu q^2) w_3 +$$

$$+ \frac{1344}{225pq} (p^2 + \nu q^2) w_5 + \frac{32}{525pq} (147p^2 + 38\nu q^2) w_6 -$$

$$- \frac{16}{1575pq} (1488p^2 + 2401\nu q^2) w_7 - \frac{32}{75pq} [9(p^4 + q^4) + 4p^2q^2] w_2^2 -$$

$$- \ell\theta_0 q^2 (p^2 - 3q^2) w_2 w_3 + \ell\theta_0 [3(p^4 + q^4) + 2p^2q^2] w_2 w_5 -$$

$$- \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2 p^2 q^2] w_2 w_6 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 - 5q^2) w_2 w_7 -$$

$$- \frac{512q}{315p} (p^2 + 15q^2) w_3^2 + \frac{1024q}{175p} (p^2 - 5q^2) w_3 w_5 -$$

$$- \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_3 w_6 - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_3 w_7 -$$

$$- \frac{512}{18375pq} [81(5p^4 + 7q^4) + 110 p^2 q^2] w_5^2 +$$

$$+ \frac{512}{165375pq} [63(135p^4 - 134q^4) - 530 p^2 q^2] w_5 w_6 +$$

$$+ \frac{1024}{165375pq} [36(635p^4 - 63q^4) + 4675 p^2 q^2] w_5 w_7 -$$

$$- \frac{1}{606375pq} [1536(13680p^4 + 4277q^4) + 2674555 p^2 q^2] w_6^2 -$$

$$- \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861 p^2 q^2] w_6 w_7 -$$

$$- \frac{256}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915 p^2 q^2] w_7^2 +$$

$$- \eta \gamma \ell \left\{ p q^2 \left[4 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + \epsilon(1-2\nu) \right] v_2 + \right.$$

$$+ p^2 \left\{ -1 - 4\varepsilon q^4 (\varepsilon^2 + \gamma^2) + 2q^2 \left[\varepsilon \left(2v + \frac{3}{2} v\varepsilon - \varepsilon \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} v - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} w_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial w_2} = & \frac{8}{45pq} \{1 - 4\lambda q^2 + 4\alpha [q^4 + 2p^4 - (27v - 32) p^2 q^2]\} - \\ & - \frac{256}{225p} (12vp^2 + q^2) u_3 + \frac{64}{1575q} [528p^2 - (129v - 68) q^2] v_5 - \\ & - \frac{64}{225pq} (14p^2 + 3vq^2) w_3 + \frac{32}{525pq} (147p^2 + 38vq^2) w_5 + \\ & + \frac{64}{315pq} (140p^2 + 31vq^2) w_6 - \frac{16}{11025pq} (15624p^2 + 6517vq^2) w_7 - \\ & - \frac{32}{3675pq} [9(84p^4 + 7q^4) - 59 p^2 q^2] w_2^2 - \\ & - \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2 p^2 q^2] w_2 w_5 + \\ & + \ell \theta_0 [3(4p^4 + q^4) + 5 p^2 q^2] w_2 w_6 + \\ & + \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_2 w_7 + \frac{512q}{1575p} (4p^2 + 9q^2) w_3^2 - \end{aligned}$$

$$- \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_3 w_5 + \frac{1024q}{6615p} (184p^2 - 279q^2) w_3 w_6 +$$

$$+ \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_3 w_7 +$$

$$+ \frac{256}{165375pq} [63(135p^4 - 134q^4) - 530 p^2 q^2] w_5^2 -$$

$$- \frac{32}{606375pq} [1536(13680p^4 + 4277q^4) + 2674555 p^2 q^2] w_5 w_6 -$$

$$- \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861 p^2 q^2] w_5 w_7 +$$

$$+ \frac{128}{1576575pq} [81(5376p^4 + 329q^4) - 6068 p^2 q^2] w_6^2 +$$

$$+ \frac{1024p}{363825q} [154482p^2 + 9141q^2] w_6 w_7 +$$

$$+ \frac{256}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949 p^2 q^2] w_7^2 +$$

$$+ \eta \gamma \ell \left\{ p q^2 \left[4 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) q^2 + \epsilon(1-2\nu) \right] v_2 + p^2 \left\{ -1 - 4\epsilon q^4 (\epsilon^2 + \gamma^2) + \right. \right.$$

$$\left. + 2q^2 \left[\epsilon \left(2\nu + \frac{3}{2} \nu \epsilon - \epsilon \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \nu - \frac{1}{3} \right) \right] w_2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial w_2} = & \frac{32}{45pq} \{11 + 4\lambda q^2 + 4\alpha [11p^4 - q^4 + 2(9\nu-4) p^2 q^2]\} + \\
& - \frac{3}{2} \ell \theta_0 p^2 q (3\nu-1) u_2 - \frac{64}{315p} (413\nu p^2 + 16 q^2) u_3 + \\
& + \frac{3}{2} \ell \theta_0 p [2p^2 + (\nu-1) q^2] v_2 + \frac{1024}{1575q} [27p^2 - (29\nu-22) q^2] v_5 + \\
& + \frac{3}{2} \ell \theta_0 (3p^2 + \nu q^2) w_2 - \frac{16}{315pq} (248p^2 + 343\nu q^2) w_3 - \\
& - \frac{16}{1575pq} (1488p^2 + 2401\nu q^2) w_5 - \frac{16}{11025pq} (15624p^2 + 6517\nu q^2) w_6 + \\
& + \frac{64}{1575pq} (2777p^2 + 112\nu q^2) w_7 + \frac{32}{525pq} [108(3p^4 - q^4) + 119 p^2 q^2] w_2^2 - \\
& - 4 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_2 w_3 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 - 5q^2) w_2 w_5 + \\
& + \frac{1}{2} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_2 w_6 + \ell \theta_0 [3(19p^4 + 4q^4) + 23 p^2 q^2] w_2 w_7 + \\
& + \frac{512q}{315p} (21p^2 - 4q^2) w_3^2 - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_3 w_5 + \\
& + \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_3 w_6 - \frac{512q}{51975p} (15197p^2 + 12768q^2) w_3 w_7 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{512}{165375pq} [36(635p^4 - 63q^4) + 4675 p^2 q^2] w_5^2 - \\
& - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861 p^2 q^2] w_5 w_6 - \\
& - \frac{512}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915 p^2 q^2] w_5 w_7 + \\
& + \frac{512p}{363825q} (154432p^2 + 9141q^2) w_6^2 + \\
& + \frac{512}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949 p^2 q^2] w_6 w_7 - \\
& - \frac{512}{4729725pq} [64(187353p^4 + 5103q^4) + 743432 p^2 q^2] w_7^2 +
\end{aligned}$$

$$+ \eta \gamma \ell \{ 6\nu \epsilon p q^2 v_2 - 2p^2 [\nu q^2 (3\epsilon^2 + \gamma^2) + 3] w_2 \}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_2} = & - \ell \theta_0 q^2 w_2 + \frac{32q}{3p} w_3 + \frac{32q}{9p} w_5 - \frac{32q}{45p} w_6 + \frac{128q}{45p} w_7 + \\
& + \eta \gamma \ell \left\{ 2\epsilon p q^2 v_2 - 2 p q^2 \left(\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right) w_2 \right\}
\end{aligned}$$

Elementos de Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial w_3}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_3^2} &= 2 \ell \theta_0 [1-4\lambda q^2 + 16 \alpha q^4] - \frac{256q^2}{15p} u_2 - 16 \ell \theta_0 q^3 u_3 + \\
 &+ \frac{256qv}{15} v_2 + \frac{64vq}{5p} w_2 + \ell \theta_0 q^2 (p^2+3q^2) w_2^2 - \\
 &- \frac{1536q^3}{35p} w_2 w_3 - \frac{1024q}{315p} (p^2+15q^2) w_2 w_5 + \\
 &+ \frac{1024q}{1575p} (4p^2+9q^2) w_2 w_6 + \frac{1024q}{315p} (21p^2-4q^2) w_2 w_7 + \\
 &+ 36 \ell \theta_0 q^4 w_3^2 + 2 \ell \theta_0 q^2 (p^2+9q^2) w_5^2 - 4 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_5 w_7 + \\
 &+ 2 \ell \theta_0 q^2 (4p^2+9q^2) w_6^2 + \frac{1}{4} \ell \theta_0 q^2 (193p^2+192q^2) w_7^2 + \\
 &+ \eta \gamma \ell \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\varepsilon^2+\gamma^2) q^4 + 4q^2 [2v (1-\varepsilon-v) + \varepsilon(\varepsilon-2-v\varepsilon)] \right\} \\
 \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5 \partial w_3} &= \frac{64}{45p} [(v-1) p^2-4q^2] u_2 - 8 \ell \theta_0 q (vp^2+q^2) u_3 + \\
 &+ \frac{64}{45} (3v+1) q v_2 - 8 v \ell \theta_0 p q^2 v_5 + \frac{32}{15pq} (21p^2+2vq^2) w_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \ell \theta_0 (7p^2 + 9vq^2) w_7 - \frac{1}{2} \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 3q^2) w_2^2 - \\
& - \frac{1024q}{315p} (p^2 + 15q^2) w_2 w_3 + \frac{1024q}{175p} (p^2 - 5q^2) w_2 w_5 - \\
& - \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_2 w_6 - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_2 w_7 + \\
& + 4 \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 9q^2) w_3 w_5 - 4 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_3 w_7 + \\
& + 6 \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_5 w_6 - 12 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_7^2 - \\
& - \eta \gamma \ell \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\varepsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 4q^2 [2v (1 - \varepsilon - v) + \varepsilon(\varepsilon - 2 - v\varepsilon)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial w_6 \partial w_3} = & - \frac{256}{225p} [(v-1) p^2 - q^2] u_2 - \frac{256q}{225} v_2 - 2 \ell \theta_0 v p q^2 v_5 - \\
& - \frac{64}{225pq} (14p^2 + 3vq^2) w_2 + \frac{1024q}{1575p} (4p^2 + 9q^2) w_2 w_3 - \\
& - \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_2 w_5 + \frac{1024q}{6615p} (184p^2 - 279q^2) w_2 w_6 + \\
& + \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_2 w_7 + 4 \ell \theta_0 q^2 (4p^2 + 9q^2) w_3 w_6 +
\end{aligned}$$

$$+ 3 \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_5^2 - 2 \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 12q^2) w_7^2 +$$

$$+ \eta \gamma \ell \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\varepsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 4q^2 [2\nu (1 - \varepsilon - \nu) + \varepsilon(\varepsilon - 2 - \nu\varepsilon)] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial w_3} = \frac{256}{315p} [23(\nu - 1) p^2 + 4q^2] u_2 + \frac{256}{315} q (19\nu - 23) v_2 +$$

$$+ \ell \theta_0 p q^2 (19\nu - 10) v_5 - \frac{16}{315pq} (248p^2 + 343\nu q^2) w_2 +$$

$$+ 2 \ell \theta_0 (7p^2 + 9\nu q^2) w_5 - 2 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_2^2 +$$

$$+ \frac{1024q}{315p} (21p^2 - 4q^2) w_2 w_3 - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_2 w_5 +$$

$$+ \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_2 w_6 - \frac{512q}{51975p} (15197p^2 + 12768q^2) w_2 w_7 -$$

$$- 4 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_3 w_5 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 q^2 (193p^2 + 192q^2) w_3 w_7 -$$

$$- 24 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_5 w_7 - 4 \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 12q^2) w_6 w_7$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_3} = \frac{32q}{3p} w_2 - 8 \ell \theta_0 q^2 w_3$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial w_5}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V^*}{\partial w_5^2} &= \ell\theta_0 [1-4\lambda q^2 + 16\alpha (p^2+q^2)^2] - \frac{128}{225p} [(15v-1) p^2+14q^2] u_2 - \\
 &- 8 \ell\theta_0 q (vp^2+q^2) u_3 + \frac{128}{225q} [14p^2+ (15v-1) q^2] v_2 + \\
 &+ \frac{1344}{225pq} (p^2+vq^2) w_2 + \frac{1}{2} \ell\theta_0 [3(p^4+q^4) + 2 p^2q^2] w_2^2 + \\
 &+ \frac{1024q}{175p} (p^2-5q^2) w_2 w_3 - \frac{1024}{18375pq} [81(5p^4+7q^4) + 110 p^2q^2] w_2 w_5 + \\
 &+ \frac{512}{165375pq} [63(135p^4-134q^4) - 530 p^2q^2] w_2 w_6 + \\
 &+ \frac{1024}{165375pq} [36(635p^4-63q^4) + 4675 p^2q^2] w_2 w_7 + \\
 &+ 2 \ell\theta_0 q^2 (p^2+9q^2) w_3^2 + 6 \ell\theta_0 q^2 (p^2+3q^2) w_3 w_6 + \\
 &+ \frac{27}{2} \ell\theta_0 (p^4+2q^4) w_5^2 - 6 \ell\theta_0 p^2q^2 w_5 w_7 + \\
 &+ \ell\theta_0 [9(4p^4+q^4) + 5 p^2q^2] w_6^2 + 9 \ell\theta_0 (7p^4+4q^4+4p^2q^2) w_7^2 - \\
 &- \eta\gamma\ell \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\varepsilon^2+\gamma^2) q^4 + 4q^2 [2v (1-\varepsilon-v) + \varepsilon(\varepsilon-2-v\varepsilon)] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_6 \partial w_5} = & - \frac{64}{1575p} [(81v+31) p^2 + 76q^2] u_2 + \\
& + \frac{64}{1575q} [112p^2 + (45v+31) q^2] v_2 - 8 \ell \theta_0 p^3 v_5 + \\
& + \frac{32}{525pq} (147p^2 + 38vq^2) w_2 + \ell \theta_0 (19p^2 + 9vq^2) w_7 - \\
& - \frac{1}{4} \ell \theta_0 [3(2p^4 - q^4) - 2 p^2 q^2] w_2^2 - \frac{1024q}{3675p} (25p^2 + 57q^2) w_2 w_3 + \\
& + \frac{512}{165375pq} [63(135p^4 - 134q^4) - 530 p^2 q^2] w_2 w_5 - \\
& - \frac{2}{606375pq} [1536(13680p^4 + 4277q^4) + 2674555p^2 q^2] w_2 w_6 - \\
& - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861p^2 q^2] w_2 w_7 + \\
& + 6 \ell \theta_0 q^2 (p^2 + 3q^2) w_3 w_5 + 2 \ell \theta_0 [9(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_5 w_6 - \\
& - 2 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_6 w_7 - \eta \gamma \ell \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\varepsilon^2 + \gamma^2) q^4 + \right. \\
& \left. + 4q^2 (2v(1-\varepsilon-v) + \varepsilon(\varepsilon-2-v\varepsilon)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial w_5} = & - \frac{512}{4725p} [(5v-51) p^2 - 42q^2] u_2 + 4 \ell \theta_0 q (7vp^2 + 2q^2) u_3 - \\
& - \frac{512}{1575q} [62p^2 - (3v-17) q^2] v_2 - \\
& - \frac{16}{1575pq} (1488p^2 + 2401vq^2) w_2 + 2 \ell \theta_0 (7p^2 + 9vq^2) w_3 + \\
& + \ell \theta_0 (19p^2 + 9vq^2) w_6 - \frac{1}{4} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 - 5q^2) w_2^2 - \\
& - \frac{128q}{14175p} (3697p^2 + 2016q^2) w_2 w_3 + \\
& + \frac{1024}{165375pq} [36(635p^4 - 63q^4) + 4675p^2q^2] w_2 w_5 - \\
& - \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861p^2q^2] w_2 w_6 - \\
& - \frac{512}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915p^2q^2] w_2 w_7 - \\
& - 2 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_3^2 - 24 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_3 w_7 - 3 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_5^2 + \\
& + 18 \ell \theta_0 (7p^4 + 4q^4 + 4p^2q^2) w_5 w_7 - \ell \theta_0 p^2 q^2 w_6^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \nu^*}{\partial \lambda \partial w_5} = \frac{32q}{9p} w_2 - 4 \ell \theta_0 q^2 w_5$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 \nu^*}{\partial x_i \partial w_6}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \nu^*}{\partial w_6^2} &= \ell \theta_0 [1 - 4\lambda q^2 + 16\alpha (q^4 + 16p^4 + 8p^2 q^2)] + \\ &- \frac{256}{945p} [2(57\nu - 1) p^2 + 31q^2] u_2 - 8 \ell \theta_0 q (4\nu p^2 + q^2) u_3 + \\ &+ \frac{256}{945p} [112p^2 + (33\nu - 2) q^2] v_2 + \frac{64}{315pq} (140p^2 + 31\nu q^2) w_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_2^2 + \frac{1024q}{6615p} (184p^2 - 279q^2) w_2 w_3 - \\ &- \frac{2}{606375pq} [512(41040p^4 + 12831q^4 + 2674555p^2 q^2)] w_2 w_5 + \\ &+ \frac{256}{1576575pq} [81(5376p^4 + 329q^4) - 6068p^2 q^2] w_2 w_6 + \\ &+ \frac{1024p}{363825q} [154432p^2 + 9141q^2] w_2 w_7 + 2 \ell \theta_0 q^2 (4p^2 + 9q^2) w_3^2 + \\ &+ \ell \theta_0 [9(4p^4 + q^4) + 5p^2 q^2] w_5^2 - 2 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_5 w_7 + \end{aligned}$$

$$+ 27 \ell \theta_0 (8p^4 + q^4) w_6^2 + 2 \ell \theta_0 [12(19p^4 + q^4) + 23p^2 q^2] w_7^2 +$$

$$+ \eta \gamma \ell \left\{ 2 + \frac{32}{3} (3\varepsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 4q^2 [2\nu (1 - \varepsilon - \nu) + \varepsilon(\varepsilon - 2 - \nu\varepsilon)] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7 \partial w_6} = \frac{256}{11025p} [(681\nu - 185) p^2 + 76q^2] u_2 -$$

$$- \frac{256}{11025q} [496p^2 + (261\nu - 185) q^2] v_2 +$$

$$+ \ell \theta_0 p [24p^2 + (3\nu + 1) q^2] v_5 - \frac{16}{11025pq} (15624p^2 + 6517\nu q^2) w_2 +$$

$$+ \ell \theta_0 (19p^2 + 9\nu q^2) w_5 + \frac{1}{4} \ell \theta_0 p^2 (21p^2 + 16q^2) w_2^2 +$$

$$+ \frac{128q}{99225p} (4933p^2 - 5472q^2) w_2 w_3 -$$

$$- \frac{128}{297675pq} [288(508p^4 + 67q^4) + 25861p^2 q^2] w_2 w_5 +$$

$$+ \frac{1024p}{363825q} (154432p^2 + 9141q^2) w_2 w_6 +$$

$$+ \frac{512}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949p^2 q^2] w_2 w_7 -$$

$$- 4 \ell \theta_0 q^2 (p^2 - 12q^2) w_3 w_7 - 2 \ell \theta_0 p^2 q^2 w_5 w_6 +$$

$$+ 4 \ell \theta_0 [12 (19p^4 + q^4) + 23p^2 q^2] w_6 w_7$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_6} = - \frac{32q}{45p} w_2 - 4 \ell \theta_0 q^2 w_6$$

Elementos da Forma $\frac{\partial^2 V^*}{\partial x_j \partial w_7}$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial w_7^2} = \ell \theta_0 \{19 - 16\lambda q^2 + 4\alpha [76p^4 + 89q^4 + 32p^2 q^2]\} -$$

$$- \frac{2048}{4725p} [375v - 17) p^2 + 70q^2] u_2 - 8 \ell \theta_0 q (19vp^2 + 4q^2) u_3 +$$

$$+ \frac{1024}{4725q} [311p^2 + (174v - 34) q^2] v_2 +$$

$$+ \frac{64}{1575pq} (2777p^2 + 112vq^2) w_2 + \frac{1}{2} \ell \theta_0 [3(19p^4 + 4q^4) + 23p^2 q^2] w_2^2 -$$

$$- \frac{512q}{51975p} (15197p^2 + 12768q^2) w_2 w_3 -$$

$$- \frac{512}{606375pq} [96(4615p^4 + 1197q^4) + 97915p^2 q^2] w_2 w_5 +$$

$$+ \frac{512}{363825pq} [32(3692p^4 - 1273q^4) + 36949p^2q^2] w_2 w_6 -$$

$$- \frac{1024}{4729725pq} [64(187353p^4 + 5103q^4) + 743432p^2q^2] w_2 w_7 +$$

$$+ \frac{1}{4} \ell_{\theta_0} q^2 (193p^2 + 192q^2) w_3^2 - 24 \ell_{\theta_0} p^2 q^2 w_3 w_5 -$$

$$- 4 \ell_{\theta_0} q^2 (p^2 - 12q^2) w_3 w_6 + 9 \ell_{\theta_0} (7p^4 + 4q^4 + 4p^2q^2) w_5^2 +$$

$$+ 2 \ell_{\theta_0} [12(19p^4 + q^4) + 23p^2q^2] w_6^2 + \frac{27}{2} \ell_{\theta_0} (241p^4 + 16q^4) w_7^2 +$$

$$+ n\gamma\ell \left\{ 38 + \frac{512}{3} (3\varepsilon^2 + \gamma^2) q^4 + 16q^2 \left[\varepsilon(\varepsilon - 4\nu - \nu\varepsilon) + \frac{\gamma^2}{3} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \lambda \partial w_7} = \frac{128q}{45p} w_2 - 16 \ell_{\theta_0} q^2 w_7$$